

**Andreas Rathgeber**

**Mehrere Preisprozesse und  
Ausübungsbedingungen  
bei der Bewertung von  
Optionen**

**40**

**QK  
660  
R234**



40/QK 660 R234

MEHRERE PREISPROZESSE UND  
AUSÜBUNGSBEDINGUNGEN BEI DER  
BEWERTUNG VON OPTIONEN

Von  
Andreas Rathgeber

UB Augsburg



08800003084384



Herstellung und Verlag: Books on Demand GmbH, Norderstedt

ISBN 3-8334-4505-X

[ 2006 ]



Mehrere Preisprozesse und Ausübungsbedingungen bei der  
Bewertung von Optionen

Inaugural-Dissertation  
der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Augsburg  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
(Dr. rer.pol.)

vorgelegt von  
Diplomökonom Andreas Rathgeber

Augsburg, Oktober 2004

Erstgutachter:

Prof. Dr. Manfred Steiner

Zweitgutachter:

Prof. Dr. Günter Bamberg

Vorsitzender der Prüfungskommission: Prof. Dr. Dres. h.c. Adolf G. Coenenberg

Tag der mündlichen Prüfung:  
12. April 2005

① 2298



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde im April 2005 von der wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Augsburg als Dissertation angenommen. Die Grundlagen dazu basieren auf Überlegungen, die bis in das Jahr 1997 zurückreichen.

Wenn sich die Erstellung einer Arbeit über so viele Jahre erstreckt, müssen zwangsläufig zahlreiche Personen durch ihre Diskussionsbereitschaft und konstruktive Kritik zum Gelingen des Promotionsprojekts beigetragen haben. Allen diesen Personen gilt heute mein herzlicher Dank.

Besonders danken möchte ich meinem Doktorvater, Herrn Professor Dr. Manfred Steiner, für die wohlwollende Betreuung und Förderung der Dissertation. Herrn Professor Dr. Günter Bamberg danke ich für die Übernahme des Zweitgutachtens und für wertvolle Hinweise im Rahmen des Entstehungsprozesses dieses Werks. Ebenso danke ich dem Vorsitzenden der Prüfungskommission, Herrn Professor Dr. Dr. h.c. Dres. Adolf Coenenberg. Für zahlreiche Anregungen, Vorschläge und Hinweise zur Ideenfindung in der Entstehungsphase danke ich den Herren Dr. Bernhard Brunner, Dr. Reiner Ellenrieder, Dr. Christoph Hesselmann, Dr. Thomas Hirschbeck, Dr. Christian Kinder, Dr. Andreas Neuß, Dr. Sebastian Schneider, Dr. Matthias Wagatha, Dr. Christian Wenninger und Dr. Benedict Wolf. Mein Dank gilt ebenso den Lehrstuhlkollegen Dr. Leonhard Grünwald, Dr. Wolfgang Mader, Dr. Nikolaus Starbatty, Prof. Dr. Martin Wallmeier und Dr. Christian Willinsky, die mir nach Durchsicht meines Manuskripts vielfältige Hinweise gegeben und Verbesserungsvorschläge gemacht haben. Insbesondere Dr. Grünwald und Prof. Dr. Wallmeier sind sich der Tragweite ihres Einflusses auf meine Arbeit, wie ich denke, nicht bewusst. Hoffentlich sind sie nicht darüber erschreckt, was aus ihren Hinweisen geworden ist.

Für konstruktive Kritik und eine angenehme Arbeitsatmosphäre möchte ich mich bei meinen Bayreuther Kollegen, Frau Dr. Natalia Bresler und den Herren Thomas Laurer, Michael Liller, Prof. Dr. Hermann-Josef Tebroke und Dr. Christian Tietze bedanken. Für die Bereitstellung zweier der drei wichtigsten Parameter für den Wirtschaftswissenschaftler möchte ich meinen Hohenheimer Kolleg(inn)en, Frau Beatrice Bär-Thiessen, Frau Hei-

demarie Kölz, Frau Ellen Schön, Frau Irene Scheer und Herrn Karl-Wilhelm Horstmann danken.

Besonderen Dank und Anerkennung verdienen, die Herren Dr. Thomas Dittmar und Dr. Marc Wagner, die mich beim Gelingen meiner Arbeit so unterstützt haben, wie es nur echte Freunde tun.

Für die Entlastung bei der Literaturbeschaffung und bei operativen Tätigkeiten bedanke ich mich bei den zahlreichen studentischen Hilfskräften und bei unseren fleißigen Teamassistentinnen Frau Elvira Erdt und Frau Christine Schuster. Dabei hat letztere nicht zuletzt durch ihre hartnäckigen Nachfragen den Abschluss dieser Arbeit gefördert. Herzlicher Dank geht auch an die fachfremden Helfer, die Herren Engin und Ferdinand Konca sowie Frau Rotraut Konca.

Mein größter und abschließender Dank gilt meinem Vater und meiner Frau, die mich während meines Studiums und meiner Promotionszeit in jeglicher Hinsicht unterstützt und mir immer die erforderlichen Freiräume gelassen haben. Durch ihre finanzielle Hilfe und ihr Verständnis haben sie die wesentlichen Voraussetzungen für meine persönliche Entwicklung geschaffen und mir damit den Weg geebnet.

Augsburg, im Dezember 2005

Andreas Rathgeber



*Für meine Frau und meinen Vater.*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>xii</b>
<b>Verzeichnis der Tabellen</b>	<b>xiii</b>
<b>Verzeichnis der Abbildungen</b>	<b>xv</b>
<b>Verzeichnis der Symbole</b>	<b>xvii</b>
<b>Verzeichnis der Abkürzungen</b>	<b>xxiii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	3
1.1.1 Praktischer Hintergrund . . . . .	3
1.1.2 Bewertungshintergrund . . . . .	4
1.2 Problemstellung . . . . .	7
1.2.1 Definition . . . . .	7
1.2.2 Untergliederung . . . . .	9
1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .	10
<b>2 Abzählbare Zeit- und Zustandsmenge - Diskreter Prozess</b>	<b>15</b>
2.1 Problemstellung . . . . .	17
2.2 Problembezogene Definition des Mehr- prozess-Problems . . . . .	18
2.3 Einführung in die Fallstudie . . . . .	19

2.4	Diskrete Modellierung von Optionen auf mehrere Preisprozesse	23
2.4.1	Modellierung mit zwei Zuständen . . . . .	23
2.4.2	Modellierung mit drei Zuständen . . . . .	25
2.5	Lösung der Fallstudie . . . . .	29
2.6	Spezielle Problemstellung bei einer Vielzahl von Preisprozessen	34
2.7	Vereinfachte Grundprozesse für $n$ Preisprozesse . . . . .	34
2.8	Kalibrierung auf gewünschte Prozessparameter . . . . .	36
2.8.1	Erwartungswerte . . . . .	36
2.8.2	Varianzen . . . . .	37
2.8.3	Matrizenzerlegung der Varianz-Kovarianz-Matrix . .	37
2.8.4	Kovarianzen und Gesamtschau . . . . .	38
2.9	Bestimmung der Matrizeneinträge . . . . .	41
2.9.1	Cholesky-Zerlegung . . . . .	41
2.9.2	Umsetzungen im Vergleich . . . . .	43
2.10	Empirischer Anwendungsfall - Finanzinnovationen . . . . .	45
2.10.1	Problemstellung Aktienanleihekonstruktion . . . . .	45
2.10.2	Vereinfachte Grundprozesse . . . . .	46
2.10.3	Datenbasis . . . . .	46
2.10.4	Zerlegung der Varianz-Kovarianz-Matrix . . . . .	47
2.10.5	Renditeprozesse . . . . .	48
2.10.6	Bewertung . . . . .	49
2.11	Zusammenfassung . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Überabzählbare Zeit- und Zustandsmenge - Wiener-Prozess</b>	<b>55</b>
3.1	Problemstellung . . . . .	57
3.2	Erweiterte Definition . . . . .	58
3.3	Bewertung von Compound-Optionen mit dem Martingalansatz	60
3.3.1	Prüfung der Anwendungsvoraussetzungen . . . . .	60
3.3.2	Ableitung des Martingalmaßes . . . . .	60
3.3.3	Wert von Compound-Optionen . . . . .	62



3.3.4	Vergleich mit dem Lösungsvorschlag von Geske . . . .	65
3.4	Erweiterungen des Compound-Option Modells . . . . .	66
3.4.1	Diskrete Barrier-Optionen . . . . .	66
3.4.2	Optionen auf mehrere riskante Vermögenswerte in der Grundkonzeption . . . . .	69
3.4.3	Maximum-Optionen . . . . .	72
3.5	Zusammenfassung . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Überabzählbare Zeit- und überabzählbare oder abzählbare Zustandsmenge - Lévy-Prozess</b>	<b>79</b>
4.1	Problemstellung . . . . .	81
4.2	Eigenschaften von Lévy-Prozessen im Vergleich zum Spezi- alfall Wiener-Prozess . . . . .	83
4.2.1	Definitionen . . . . .	83
4.2.2	Randverteilungen . . . . .	86
4.2.3	Stochastische Differentialgleichungen . . . . .	88
4.2.4	Approximation von Aktienrenditeprozessen . . . . .	89
4.3	Äquivalentes Martingalmaß . . . . .	92
4.3.1	Unvollständigkeit . . . . .	92
4.3.2	Esscher-Transformation als Eindeigkeitskriterium .	94
4.3.3	Eignung der Esscher-Transformation . . . . .	97
4.3.4	Esscher-Transformationen für ausgewählte Aktienkur- sprozesse . . . . .	98
4.4	Wert europäischer Kaufoptionen . . . . .	99
4.4.1	Herleitung nach dem Martingalansatz . . . . .	99
4.4.2	Wert europäischer Optionen auf den DAX . . . . .	101
4.5	Wert von Compound-Optionen . . . . .	104
4.5.1	Esscher-Transformation . . . . .	104
4.5.2	Herleitung nach dem Martingalansatz . . . . .	105
4.5.3	Modellauswertung . . . . .	108

4.6 Zusammenfassung . . . . .	109
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>113</b>
5.1 Zusammenfassung . . . . .	115
5.2 Ausblick . . . . .	118
<b>A Anhang zu Abschnitt 2</b>	<b>121</b>
A.1 Anhang . . . . .	121
A.2 Anhang . . . . .	123
A.3 Anhang . . . . .	126
<b>B Anhang zu Abschnitt 3</b>	<b>129</b>
B.1 Anhang . . . . .	129
B.2 Anhang . . . . .	131
B.3 Anhang . . . . .	134
B.4 Anhang . . . . .	135
B.5 Anhang . . . . .	139
<b>C Anhang zu Abschnitt 4</b>	<b>141</b>
C.1 Anhang . . . . .	141
C.2 Anhang . . . . .	142
C.3 Anhang . . . . .	143
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>145</b>

# Tabellenverzeichnis

1.1	<i>Überblick über die Bewertung von Optionen auf mehrere Basiswerte, Compound-Optionen und Barrier-Optionen . . . .</i>	7
2.1	<i>Realloptionspreise für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren . . . . .</i>	22
2.2	<i>Variablen der Preisprozesse für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren . . . . .</i>	24
2.3	<i>Übersicht über die Preisprozess- und Optionsparameter für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren . . . . .</i>	29
2.4	<i>Zustandsvariablen der Preisprozesse und Wahrscheinlichkeiten für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren . .</i>	30
2.5	<i>Übersicht über die Martingalwahrscheinlichkeiten für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren . . . . .</i>	31
2.6	<i>Variablen der Preisprozesse für die Fallstudie nach dem erweiterten Verfahren . . . . .</i>	43
2.7	<i>Zustandsvariablen der Preisprozesse und Wahrscheinlichkeiten für die Fallstudie nach dem erweiterten Verfahren . . .</i>	44
2.8	<i>Realloptionspreise für die Fallstudie nach dem erweiterten Verfahren . . . . .</i>	44
2.9	<i>Daten des Blue Yield Bonds . . . . .</i>	45
2.10	<i>Korb der Basiswerte des Blue Yield Bonds . . . . .</i>	46
2.11	<i>Martingalwahrscheinlichkeiten beim Blue Yield Bond . . . .</i>	49

2.12	<i>Martingalwahrscheinlichkeiten für die Zinszahlung nach dem ersten Jahr beim Blue Yield Bond . . . . .</i>	50
4.1	<i>Normalverteilungstests für Aktienrenditen . . . . .</i>	90
4.2	<i>Eignung von Lévy-Prozessen zur Approximation . . . . .</i>	91
A.2	<i>Zerlegung der Varianz-Kovarianz-Matrix beim Blue Yield Bond</i>	125
A.3	<i>Unabhängige Zufallsvariablenvektoren beim Blue Yield Bond</i>	128
C.1	<i>Charakteristische Randverteilungsfunktionen von Lévy-Prozessen</i>	141

# Abbildungsverzeichnis

1.1	<i>Kapitelübersicht</i> . . . . .	13
2.1	<i>Aufbau des Trinomialbaumes für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren</i> . . . . .	27
2.2	<i>Mit Beispielesdaten kalibrierter Trinomialbaum für zwei Jahre nach dem allgemeinen Verfahren</i> . . . . .	31
2.3	<i>Verteilung der beiden Preisprozesse nach dem allgemeinen Verfahren</i> . . . . .	33
2.4	<i>Aufbau des Problems mit 16 Preisprozessen nach dem erweiterten Verfahren</i> . . . . .	48
3.1	<i>Compound-Option nach Geske</i> . . . . .	59
3.2	<i>Prozesse bei der Bewertung von Compound-Optionen</i> . . .	64
3.3	<i>Transfer von bedingten Optionsproblemen auf Mehrprozess-Probleme</i> . . . . .	70
4.1	<i>An die Darrenditen kalibrierter Mixed Meixner-Prozess</i> . .	92
4.2	<i>Optionspreise beim Mixed Meixner- und Wiener-Prozess</i> .	103
4.3	<i>Volatility-Smile beim Mixed Meixner-Prozess</i> . . . . .	104
4.4	<i>Compound-Optionen bei Mixed Meixner- und Wiener-Prozess</i>	108
4.5	<i>Volatility-Smile für Compound-Optionen bei Mixed Meixner-Prozess und Wiener-Prozess</i> . . . . .	109



# Verzeichnis der Symbole

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Parameter der Lévy-Prozesse
$a^i$	Matrizeneinträge der Matrix $A$
$a_j$	Zustandsvariable der stetigen Renditeänderung des $i$ -ten Vermögenswertes im Zustand $j$
$A$	Matrix nach Zerlegung
$\mathcal{A}$	$\sigma$ -Algebra
$\arctan$	Arcustanges
$\arccos$	Arcuscosinus
$B(), B_k$	Auszahlungsprofil von Optionen und Derivaten
$\bar{B}()$	Auszahlungsfunktion der Option
$c()$	Konstante der Esscher-Transformation
$C$	Optionspreis
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlenebene
$\hat{C}$	Fouriertransformierte des Optionspreises
$Co$	Konsum
$\cos$	Cosinus
$\cosh$	Cosinus Hyperbolicus

$cov^{i_1 i_2}$	Kovarianz des $i_1$ -ten Vermögenswertes mit dem $i_2$ -ten Vermögenswert
$Cov()$	Kovarianzoperator
$COV$	Varianz-Kovarianz-Matrix
$D$	Pseudodifferentialoperator
$\Delta(1)$	Diracsche Deltafunktion zu Eins
$e$	e-Umgebung eines Punktes
$E^i$	erwartete stetige Rendite des $i$ -ten Vermögenswertes pro Zeitschritt
$E_P()$	Erwartungswertoperator unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P$
$E_P( )$	bedingter Erwartungswertoperator unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P$
$\eta$	Variable der charakteristischen Funktion
$\epsilon$	Risikoaversionskoeffizient
$\exp$	Exponent
$\in$	Element von
$f_P()$	Dichte zum Maß $P$
$\hat{f}$	charakteristische Funktion von $f$
$f( )$	bedingte Dichte
$F()$	Verteilung
$\Phi_P()$	Lévy-Exponent zum Wahrscheinlichkeitsmaß $P$
$h$	Permutation der Cholesky-Zerlegung
$HYP()$	Hyperbolischer Prozess
$H()$	Entropie



$\mathcal{H}_k()$	Koeffizient der multivariaten Normalverteilung
$i$	Index für Vermögenswerte
$\inf$	Infimum
$I$	Menge der Preisprozesse
$\mathbb{I}$	Indikatorfunktion
$\iota$	imaginäre Zahl
$j$	Indexmenge der möglichen Zustände
$J$	Identitätsabbildung bei Matrizen
$k$	Index der Ausübungszeitpunkte von Compound-Optionen und Dimension der multivariaten Normalverteilung
$K_1()$	1. Modifizierte Besselfunktion
$\kappa$	Sprunghöhe des gewichteten Poisson-Prozesses
$l$	Index der Vermögenswerte
$\ln$	Logarithmus naturalis
$\lambda$	Sprungintensität eines Poisson-Prozesses
$\Lambda$	Korrelationsmatrix der multivariaten Normalverteilung
$\mathcal{L}^2$	Raum der quadratintegrierbaren Funktionen
$m, m + 1$	Anzahl der Zustände
$m_t$	erwartete instantane Änderung eines Lévy-Prozesses
$\mu_t$	resultierender Drift des Sprungdiffusionsprozesses
$m_{1t}$	deterministische Komponente nach Abspaltung des Exponentialmartingals des Wiener-Prozesses
$m_{2t}$	deterministische Komponente des Semimartingals Sprungprozess des Lévy-Prozesses

$M_t$	Martingal
$\mu_i$	instantane Erwartungswert eines Wiener Prozess, stetige Renditeänderung des $i$ -ten Vermögenswertes pro Zeitschritt und Drift der Brownschen Bewegung
$Mat_{n \times n}^{sym}()$	Menge aller symmetrischen Matrizen
$MM()$	Mixed Meixner-Prozess
$n$	Anzahl der Preisprozesse
$\nu$	Zeitpunkt
$NV()$	Normalverteilung
$nv()$	Dichte der Normalverteilung
$NV_k()$	Multivariate Normalverteilung der Dimension $k$
$NIG()$	Normaler Inverser Gauss-Prozess
$\omega$	Zufallsvariable, kein Element von $\Omega$
$\Omega$	Grundgesamtheit
$\pi$	Kreiszahl
$p_j$	Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Zustands $j$
$p$	Wahrscheinlichkeitsvektor
$P$	Wahrscheinlichkeitsmaß, meist empirisch
$PV()$	Barwert
$PO()$	Poisson-Prozess
$q_j$	Martingalwahrscheinlichkeit des Eintretens des Zustands $j$
$Q$	Wahrscheinlichkeitsmaß, meist Martingal
$r$	stetiger Zinssatz risikoloser Anlagen

$Rg()$	Rang einer Matrix
$\mathbb{R}^{m+1}$	Menge der $m + 1$ -Vektoren aus reellen Zahlen
$\rho$	Korrelationskoeffizient
$S_t$	Aktienkurs
$S_1$	Driftkoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung
$S_2$	Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung
$\sin$	Sinus
$\sigma$	instantane Standardabweichung eines Wiener-Prozesses
$SRg()$	Spaltenrang einer Matrix
$t$	Zeitindex, meist Zeitpunkt
$\tau$	Zeitspanne
$T$	Indexmenge, meist Zeitbereich
$T$	Transponierte einer Matrix oder eines Vektors
$\theta$	Parameter der Esscher-Transformation
$\mathcal{U}()$	Nutzenfunktion
$u, v$	Substitutionsvariablen
$V$	Basiswert der Compound-Option
$V_*$	impliziter Ausübungspreis bei der Compound-Option
$var^i$	Varianz der stetigen Rendite des $i$ -ten Vermögenswertes
$Var()$	Varianzoperator
$Vert()$	Verteilungsfunktion
$VG()$	Varianz-Gamma-Prozess
$W_t$	Wiener-Prozess
$x$	Zustandsvariable des Wiener-Prozesses

$X(t)$	Zustandsmatrix
$x^i(t)$	Zustand des vektoriellen stochastischen Prozesses zum Index $t$
$X^i(t)$	Zustand der Einzelkomponente $i$ des vektoriellen stochastischen Prozesses zum Index $t$
$X_{t,j}^i$	Preis zum Zeitpunkt $t$ im Zustand $j$ des Vermögenswerts $i$
$\xi$	Zeitpräferenz
$\chi$	Portfoliogewicht
$Y(t)$	Zustandsvariable eines Lévy-Prozesses
$z_k$	Zustandsvariable eines Standard-Wiener-Prozesses mit Erwartung Null und Varianz Eins
$z^i$	Zustandsvektor des $i$ -ten vereinfachten Grundprozesses
$Z^i()$	Einträge in den Vektor des $i$ -ten vereinfachten Grundprozesses
$\mathbf{1}$	Einsvektor
$\infty$	Unendlich
$\forall$	Allquantor
$\circ$	Vektorprodukt
$\odot$	allgemeine Verknüpfung

# Verzeichnis der Abkürzungen

a.M.	am Main
Aufl.	Auflage
bspw.	beispielsweise
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
CAPM	Capital Asset Pricing Model
CPRA	Constant Proportional Risk Aversion
CRRA	Constant Relative Risk Aversion
DAX	Deutscher Aktienindex
d.h.	das heißt
et al.	et alii
etc.	et cetera
evtl.	eventuell
f.	folgende [Seite]
ff.	folgende [Seiten]
f.s.	fast sicher
Hrsg.	Herausgeber
GMM	Generalized Method of Moments
konst.	konstant
i.A.	im Allgemeinen
i.Br.	im Breisgau

i.e.S.	im engeren Sinne
i.T.	in Teilen
i.V.m.	in Verbindung mit
M	Mieter
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
p.A.	per Anno
RA	Realloption
S.	Seite
T.	Tausend
u.	und
U	Vermieter/Unternehmen
u.a.	unter anderen
u.i.v.	unabhängig und identisch verteilt
usw.	und so weiter
u.U.	unter Umständen
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel
z.T.	zum Teil







# Kapitel 1

## Einleitung



## 1.1 Motivation

### 1.1.1 Praktischer Hintergrund

Schon seit dem neunzehnten Jahrhundert werden Optionen auf Aktien an den Börsen dieser Welt gehandelt. Ein bekanntes historisches Beispiel stammt von der Chicagoer Börse, an der *Russel Sage* als Spekulant erfolgreich war.<sup>1</sup> Er trat als Stillhalter in Kaufoptionen auf und ließ sich vom Käufer der Kaufoptionen für den Kaufoptionspreis zusätzlich ohne weitere Prämienzahlung eine Verkaufsoption auf denselben Basiswert einräumen. Diese Leerverkaufsposition in Aktien konnte dann problemlos unter Aufbringung des nötigen Volumens an Zahlungsmitteln und der damit verbundenen Zinsen durch den Kauf des Basiswerts gedeckt werden. Der so erzielte risikolose Ertrag basiert auf einem echten Arbitragegeschäft.

Mit der Einführung von Indizes auf Aktien<sup>2</sup> wurde auch die Möglichkeit geschaffen, Optionen auf mehr als eine Aktie zu handeln. Hier werden genau genommen Optionen auf eine gewichtete Summe aus Aktienkursen gehandelt, die voneinander abhängig sein können. Allerdings wird oftmals der Index selbst als ein Basiswert angesehen.

Deutlicher wird diese Abhängigkeit von mehreren Aktienkursen mit der Einführung von Optionen auf Aktienkörbe. Hier wird ersichtlich, dass der Basiswert als Bündel aus mehreren Einzelaktien angesehen werden sollte. In jüngster Zeit werden auch Privatanlegern komplexe Optionskonstruktionen angeboten.<sup>3</sup> So existieren Optionen, bspw. als Komponente von Aktienanleihen, auf verschiedene Einzelaktien. Der Emittent hat hierbei die Möglichkeit alternativ die eine oder die andere Aktie zu liefern.<sup>4</sup> Aber auch Optionskonstruktionen treten auf, bei denen Aktienkurse von ein und derselben Aktie zu verschiedenen Zeitpunkten Bedeutung haben können.<sup>5</sup> Ferner wird die Kombination aus beiden angeboten, Optionskonstruktionen, bei denen die Preise verschiedener Aktien zu unterschiedlichen Zeitpunkten relevant sein können.<sup>6</sup> So kann im Falle dieser Optionskonstruktionen nur dann eine Ausübung möglich sein, falls ein Basiswert oder mehrere Basiswerte zu verschiedenen Zeitpunkten die sog. Knock-In-Bedingungen erfüllen.

---

<sup>1</sup>Vgl. **Miller** (1975), S. 4 f. *Sage* dehnte diese Form der Transaktionen auch auf andere Arbitragegeschäfte aus. Vgl. **Sarnoff** (1965), S. 237.

<sup>2</sup>In Deutschland konnten Produkte auf Indizes zum Teil erst seit Mitte der Neunzigerjahre eingeführt werden. Vgl. **Barth** (1998), S. 224.

<sup>3</sup>Vgl. **Kraft/Trautmann** (2001), S. 539 ff.

<sup>4</sup>Vgl. etwa **Wilkens et al.** (2001), S. 932 ff.

<sup>5</sup>Vgl. etwa **Fischer/Keber/Schuster** (2000), S. 106 ff.

<sup>6</sup>Vgl. hier und im Folgenden **Brechmann et al.** (2002), S. 81.

Inwieweit allerdings der Emissionspreis fair ist oder eventuell Arbitragegewinne, wie bei *Sage*, erzielbar sind, wurde erst in jüngster Zeit zu untersuchen begonnen.<sup>7</sup> Um faire Preise am Primär- und Sekundärmarkt zu erhalten, ist es entscheidende Voraussetzung, wie schon im Falle der Verkaufsoptionen im neunzehnten Jahrhundert, geeignete Bewertungsmodelle für solche Optionskonstruktionen aufzufinden.

### 1.1.2 Bewertungshintergrund

Im Fall der einfachen Optionen im neunzehnten Jahrhundert gelang *Bachelier* eine der ersten Bewertungen.<sup>8</sup> Er legte eine arithmetische Brownsche Bewegung als stochastischen Prozess für die Aktienkursbewegung zu Grunde. Daraus generierte er die Verteilung des Aktienkurses zum Ausübungszeitpunkt und konnte daraufhin unter Risikoneutralität den Optionen einen Wert beismessen.

Allerdings erlaubte *Bacheliers* Annahme bzgl. des stochastischen Prozesses negative Aktienkurse und damit Arbitragemöglichkeiten.<sup>9</sup> Den Arbitragegedanken brachten *Black/Scholes* und *Merton*<sup>10</sup> in die Optionsbewertung. Sie bewerteten Optionen über deren Duplikationsportfolios, ein Ansatz, der sich zum Paradigma der Bewertung von Zahlungsströmen generell entwickelt hat.<sup>11</sup>

Kurze Zeit später erfolgte dann eine Ausdehnung auf komplexere Optionen, wie Optionen auf mehrere Basiswerte, auch multivariate Optionen genannt.<sup>12</sup> Eine der ersten Bewertungsformeln stammt dabei von *Margrabe*.<sup>13</sup> *Margrabe* bewertet die Option eine Aktie gegen eine andere zu tauschen. Er löst dies, indem er den Quotientenprozess als neuen Basiswertprozess unterstellt.

Mehrere Prozesse muss dagegen *Stulz* unterstellen, um den Wert von Maximums- und Minimum-Optionen zu bestimmen.<sup>14</sup> Das sind Optionen, die das Recht beinhalten, aus verschiedenen Aktien die Aktie mit dem höheren oder niedrigeren Aktienkurs zu einem fixen Bezugspreis zu beziehen.

<sup>7</sup>Erste Ergebnisse zu Aktienanleihen finden sich bei *Stoimenov/Wilkens* (2004), S. 217. Weiterhin bieten *Stoimenov/Wilkens* einen aktuellen Überblick über Analysen der Emissionspreise von einfachen Aktienanleihen. Vgl. *Stoimenov/Wilkens* (2004), S. 213.

<sup>8</sup>Vgl. *Bachelier* (1900), S. 55 f.

<sup>9</sup>Vgl. *Samuelson* (1965a), S. 15 ff.

<sup>10</sup>Vgl. *Black/Scholes* (1973), S. 641 und *Merton* (1973), S. 160 ff. Zu einem Überblick über die historische Entwicklung vgl. *Perridon/Steiner* (2003), S. 330 f.

<sup>11</sup>Vgl. *Wenger/Kaserer* (1998), S. 31.

<sup>12</sup>Vgl. zum Begriff multivariate Optionen *Stapleton/Subrahmanyam* (1984), S. 207.

<sup>13</sup>Vgl. *Margrabe* (1978), S. 181.

<sup>14</sup>Vgl. *Stulz* (1982), S. 163.

Eine der ersten Bewertungsmethoden für Index- oder Basket-Optionen stammt von *Bailey/Stulz*.<sup>15</sup> Sie bewerteten Index-Optionen unter Berücksichtigung von Portfolioeffekten. Diese Effekte lassen sich an Hand eines Beispiels mit zwei gleichgewichteten Aktien mit verschiedenen Volatilitäten darstellen. Bleiben die beiden Aktienkurse konstant, ändert sich der Portfoliowert nicht und die Volatilität entspricht der ursprünglichen Volatilität des Portfolios. Ändern sich die beiden Aktienkurse gegenläufig, so dass der Portfoliowert gleich bleibt, ändert sich die Volatilität des Portfolios. Veränderte Volatilitäten aber führen letztendlich zu einem anderen Optionswert.

Neben der Bewertung von Optionen auf mehrere Aktien als Basiswert, wurden auch Bewertungen für Optionen auf Aktien zu verschiedenen Zeitpunkten durchgeführt. Eine der ersten Bewertungen in diesem Bereich stammt von *Geske*.<sup>16</sup> Er bewertete die sogenannten Compound-Optionen, zusammengesetzte Optionen. Nach Ausübung einer ersten Option erhält der Inhaber eine zweite Option, die zum Bezug des eigentlichen Basiswerts berechtigt.

Aber auch Optionen, die nur ausgeübt werden dürfen, falls der Kurs zu vorherigen Zeitpunkten nie eine Knock-Out-Schwelle unterschritten hat, fallen unter diese Bewertungsidea.<sup>17</sup> Für einige dieser Probleme existieren geschlossene Lösungsformeln.<sup>18</sup> Meist werden aber Bäume zur Gewinnung von Lösungen verwendet, wobei das Hauptaugenmerk bei diesen Verfahren auf der numerischen Umsetzung liegt.<sup>19</sup>

Nachfolgende Übersicht gibt einen einführenden Einblick über die verschiedenen Bewertungsmodelle:

Optionstyp	Quelle	Optionsproblem
Optionen auf mehrere Basiswerte	<i>Margrabe, William: The Valuation of an Option to Exchange one Asset for Another, 1978</i>	Geometrische Brownsche Bewegung für Tausch-Optionen
	<i>Stulz, René: Options on the Minimum or Maximum of Two Risky Assets, 1982</i>	Geometrische Brownsche Bewegung für Minimum- und Maximum-Optionen

<sup>15</sup>Vgl. **Bailey/Stulz** (1989), S. 4 ff.

<sup>16</sup>Vgl. **Geske** (1977) und **Geske** (1979).

<sup>17</sup>Das dies so ist wird sich später zeigen. Vgl. auch **Rathgeber** (2004), S. 15.

<sup>18</sup>Einen Überblick bietet **Rich**. Vgl. **Rich** (1994), S. 276 ff.

<sup>19</sup>Einen Überblick bietet **Ritchken**. Vgl. **Ritchken** (1995), S. 20 ff.

	<i>Boyle, Phelim: A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables, 1988</i>	Trinomialbaum für Optionen auf mehrere Aktien
	<i>Bailey, Warren / Stulz, René: The Pricing of Stock Index Options in a General Equilibrium Framework, 1989</i>	Geometrische Brownsche Bewegung für Index-Optionen
	<i>Madan, Dilip et al.: The Multinomial Option Pricing Model and its Brownian and Poisson Limits, 1989</i>	Binomiales Modell mit Geometrische Brownsche Bewegung und Poisson-Prozess als Grenzprozess
	<i>Rubinstein, Mark: Somewhere over the Rainbow, 1991</i>	Quadronominalbaum für Basket-Optionen
	<i>Shimko, David: Options on Futures Spreads, 1994</i>	Geometrische Brownsche Bewegung für Spread-Optionen
	<i>Chen, Ren-Raw at al.: Option Pricing in a Multi-Asset, Complete Market Economy, 2002</i>	Multinomialmodell für Optionen
Compound-Optionen	<i>Geske, Robert: The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options, 1977</i>	Geometrische Brownsche Bewegung für Kuponanleihen
	<i>Geske, Robert: The Valuation of Compound Options, 1979</i>	Geometrische Brownsche Bewegung für zweistufige Optionen
	<i>Geske, Robert / Johnson, Herb: The American Put Option Valued Analytically, 1984</i>	Geometrische Brownsche Bewegung für amerikanische Verkaufsoptionen
	<i>Lajeri-Chaherli, Fatma: A Note on the Valuation of Compound Options, 2002</i>	Geometrische Brownsche Bewegung und Martingal-Herleitung für Compound-Optionen

Barrier-Optionen	<i>Merton, Robert: The Theory of Rational Option Pricing, 1973</i>	Geometrische Brownsche Bewegung für Knock-Out-Optionen
	<i>Boyle, Phelim/Lau, Sok: Bumping Up against the Barrier with the Binomial Method, 1994</i>	Modifizierter Binomialbaum für Barrier-Optionen
	<i>Rich, Don: The Mathematical Foundation of Barrier Option-Pricing Theory, 1994</i>	Geometrische Brownsche Bewegung für verschiedene Barrier-Optionen
	<i>Ritchken, Peter: On Pricing Barrier Options, 1995</i>	Baummodelle für verschiedene Barrier-Optionen

Tabelle 1.1: Überblick über die Bewertung von Optionen auf mehrere Basiswerte, Compound-Optionen und Barrier-Optionen

Dieser Überblick erhebt dabei bei Weitem keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Er enthält aber die meisten entscheidenden Bewertungsinnovationen, die sich in den vergangenen Jahren entwickelt haben.<sup>20</sup>

## 1.2 Problemstellung

### 1.2.1 Definition

Um die Problemstellung genau erfassen zu können, muss vorab eine exakte Definition und Systematisierung der verschiedenen Tatbestände erfolgen. Zunächst soll die Bewertung von Optionen aus ökonomischer Sicht betrachtet werden.

**Definition 1.2.1.1.** *Unter einem Mehrprozess-Problem versteht man ein Bewertungsproblem, bei dem drei oder mehr deterministische oder stochastische Prozesse als Preisprozesse zu Grunde liegen. Von den drei oder mehr Preisprozessen darf höchstens ein Preisprozess deterministisch sein und sämtliche Preisprozesse dürfen nicht vollständig voneinander abhängen.*

<sup>20</sup>Für einen Überblick über die Historie vgl. Hull/White (1988). Eine Bibliographie der wichtigsten Beiträge für exotische Optionskonstrukte i.A. bietet Lyden. Vgl. Lyden (1996).

Ein stochastischer Prozess ist dabei in der allgemeinsten Form auf einer geordneten Menge, wie folgt, definiert:

**Definition 1.2.1.2.** *Ein stochastischer Prozess ist definiert durch das Quadrupel*

$$(\Omega, \mathcal{A}, P, X(t)),$$

wobei  $\Omega$  die Grundgesamtheit aller Ereignisse,  $\mathcal{A}$  die zugehörige  $\sigma$ -Algebra darstellt, und  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß für den Eintritt eines Ereignis.

Dabei wird die Grundgesamtheit durch Unter- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{A}$  filtriert, wobei die Abbildungen  $X(t)$  eine meßbare Abfolge von Zufallsvariablen auf diesem Mengensystem darstellen. Eine Indexmenge, eine geordnete Menge von  $t \in T$ , bestimmt die Abfolge. Die Zufallsvariablen sind in diesem speziellen Fall Preise, die Abfolge Preisprozesse.<sup>21</sup>

Nach diesen Definitionen müssen für ein Mehrprozess-Problem mindestens drei Preisprozesse vorhanden sein. Das Problem von *Margrabe*<sup>22</sup> aus dem Abschnitt 1.1.2 ist damit kein Mehrprozess-Problem im Sinne dieser Definition, was sich u.a. aus bewertungstechnischer Sicht als sinnvoll erweisen wird.

Der Ausschluss der Abhängigkeiten bringt mit sich, dass ein Problem mit drei Preisprozessen, bei dem eine vollständige Abhängigkeit zwischen den verschiedenen Preisprozessen besteht, nicht zu den Mehrprozess-Problemen gezählt werden kann. Ein Beispiel dafür wäre, wenn bei einem Bewertungsproblem neben dem Preisprozess des risikolosen Vermögenswerts, ein risikanter Preisprozess und ein Derivat auf diesen, etwa ein Future, existiert. Aus bewertungstechnischer Sicht, sind, wie sich später erweisen wird, nur die Endverteilungen relevant,<sup>23</sup> so dass hier das Problem anders anzusehen ist.

Als zweites Problem wird ein bedingtes Optionsproblem betrachtet.

**Definition 1.2.1.3.** *Ein bedingtes Optionsproblem ist definiert als ein Problem, bei dem ein zeitlich vorgelagertes Ereignis auftreten muss, um daraufhin zeitlich nachgelagert mindestens eine Option ausüben zu können. Dieses zeitlich vorgelagerte Ereignis stellt immer eine Optionsausübung oder Nichtausübung dar. Die Zeitdifferenz zwischen den beiden Ausübungen kann dabei bis faktisch Null zurückgehen.*<sup>24</sup>

<sup>21</sup>Vgl. etwa **Bauer** (1991), S. 304.

<sup>22</sup>Vgl. **Margrabe** (1978), S. 177 ff.

<sup>23</sup>Vgl. Abschnitt 3.4.

<sup>24</sup>Allgemeiner ist aber auch denkbar, dass eine Option zu den Konditionen eines früheren Zeitpunktes erst dann ausgeübt werden kann, wenn ein zeitlich nachgelagertes Ereignis eingetreten ist. Dieses Problem wird aber im Folgenden ausgeklammert.



Dabei kann sich das bedingte Optionsproblem auch auf mehrere verschiedene Preise beziehen. Ist etwa zur Ausübung einer europäischen Option auf eine Aktie Voraussetzung, dass eine andere Aktie einen entsprechenden Kurs gezeigt hat, so gilt dies nach obiger Definition sowohl als Mehrprozess- als auch als bedingtes Optionsproblem.

Ein bekanntes Optionsbewertungsproblem, das im Abschnitt 1.1.2 bereits erwähnt wurde, fällt damit auch unter das bedingte Optionsproblem, die Bewertung von Barrier-Optionen. So gilt für die klassische Barrier-Option, die Knock-Out-Option etwa nach *Merton*.<sup>25</sup> Nur wenn der Preisprozess, die Barrier nicht unterschritten hat, kann die Option ausgeübt werden. Das Nichtunterschreiten der Barrier kann damit aus Sicht des Optionsinhabers der Barrier-Option als Nichtausüben einer Stillhalterposition verstanden werden.

Im Folgenden wird sich die Arbeit aber auf Bewertungsprobleme beschränken, bei denen zur Ausübung nur eine abzählbare Anzahl von Bedingungen erfüllt werden muss. Das bedeutet, dass Optionen bei denen zu überabzählbar vielen Zeitpunkten Bedingungen erfüllt werden müssen, hier nicht betrachtet werden. Bei den Barrier-Optionen werden also ausschließlich diskrete Barrier-Optionen<sup>26</sup> analysiert.<sup>27</sup>

## 1.2.2 Untergliederung

Obwohl sich zahlreiche Autoren dieser Problemstellungen angenommen, bleiben noch einige Fragestellungen offen:

1. Da sich die Bewertung von Optionen auf mehrere Vermögenswerte als komplex erwiesen hat, wäre ein leicht zugängliches Verfahren wünschenswert. Weiterhin sollte solch ein Verfahren aus numerischer Sicht gut umsetzbar sein, so dass es auch ohne großen Aufwand für die Preisung der neu z.T. für Privatanleger geschaffenen Finanzprodukte implementiert werden kann.
2. Nachdem Mehrprozess- und bedingtes Optionsproblem in einer Arbeit behandelt werden, scheinen Zusammenhänge naheliegend. Ein

<sup>25</sup>Vgl. *Merton* (1973), S. 175 ff.

<sup>26</sup>Zur Definition vgl. z.B. *Steiner et al.* (1999), S. 150. Für eine der ersten Bewertungen vgl. *Cheuck/Vorst* (1996), S. 8 f.

<sup>27</sup>Daneben existieren noch weitere Probleme, bei denen eine überabzählbare Menge an Zeitpunkten, oft ein Zeitkontinuum, zu Grunde gelegt wird. Im Bereich der Finanzoptionen stellt der bekannteste derartige Optionstyp die amerikanische Option dar. Zu einer Übersicht über amerikanische (Finanz-)Optionen vgl. z.B. *Hull* (2003), S. 425 ff.

weiteres Ziel muss es deshalb sein den Zusammenhang zwischen Mehrprozess- und bedingtem Optionsproblem, insbesondere unter der Annahme eines Wiener-Prozesses, zu untersuchen und eventuelle Erkenntnisse daraus für die Bewertung zu nutzen.

3. Weiterhin ist das bedingte Optionsproblem noch nicht unter Familien weitergehender stochastischer Prozesse untersucht worden. Ziel ist es die Bewertung von Compound-Optionen unter Lévy-Prozessen durchzuführen.

Diese drei Problemkreise sollen im Folgenden analysiert werden.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit richtet sich in ihrem Aufbau nach diesen Problemkreisen. Dabei erweist es sich als günstig, dass die Problemkreise jeweils abhängig vom Typ der zugrunde liegenden Preisprozesse angesehen werden können. Die Preisprozesse und damit die Problemkreise können auf der Basis des Zeit/Ergebnis-Gerüsts<sup>28</sup>, genauer auf Basis der Mächtigkeit der beiden Mengen, untergliedert werden.<sup>29</sup>

Für die Gliederung ergibt sich folgendes:

1. Abzählbare Zeit- und Ergebnismenge
2. Überabzählbare Zeit- und Ergebnismenge
3. Überabzählbare Zeit- und (abzählbare oder überabzählbare) Ergebnismenge

Nach der Einleitung beginnt die Arbeit mit der grundsätzlichen Beschreibung der Lösungen für die Problemstellungen und deren Umsetzung in abzählbarer Zeit- und Ergebnismenge. Dazu werden zunächst im Abschnitt 2.2 die allgemeinen Definitionen aus Abschnitt 1.2.1 auf den abzählbaren Fall übertragen. Sodann wird aufgezeigt, dass eine oft diskutierte Lösung auf Basis des Binomialbaumes hier nicht den gewünschten Erfolg bringen

---

<sup>28</sup>Hier wird zunächst der anschauliche Begriff Zeit für die Abfolge  $T$  anstelle von Ordnung verwendet.

<sup>29</sup>Im Rahmen eines Bepreisungsverfahrens werden üblicherweise zwei Vorgehensweisen bei der Modellierung angewendet: Die Modellierung in kontinuierlicher und in diskreter Zeit. Ferner können beide Vorgehensweisen miteinander kombiniert werden. Vgl. **Cox/Ross** (1976), S. 147. Allerdings ist die Unterscheidung aufgrund von Überlegungen, die aus der mengentheoretischen Topologie stammen, nicht zwingend. Vgl. **Querenburg** (2001), S. 6.

kann. Im darauffolgenden Abschnitt werden allgemeine Bedingungen dargestellt, wie ein zielführendes System stochastischer Prozesse aufgestellt werden kann. In einer praktischen Fallstudie, in der bedingte Optionsprobleme wie Mehrprozess-Probleme auftreten, werden die Bedingungen dargestellt und ein dem gemäßer Prozess zur Lösung aufgestellt.

Um allerdings eine effiziente Bewertung auch bei einer Vielzahl von Preisprozessen durchführen zu können, müssen die Bedingungen eingeschränkt werden. Zum Aufbau des Prozesses und der Anpassung an die gewünschten Marktdaten, wird dabei eine Zerlegung der Varianz-Kovarianz-Matrix der Preisprozesse verwendet, die dann eine Lösung als lineares Problem erlaubt. Die Anpassung der Erwartungswerte der Preisprozesse an die gewünschten Werte stellt dann ebenso eine lineare Operation, eine einfache Addition, dar. Aus den so aufgebauten Matrizen kann in Verbindung mit Parametern für vereinfachte Grundprozesse ein Prozess mit den gewünschten Parametern erstellt werden. Diese numerisch besser handhabbare Vorgehensweise wird verwendet, um die in jüngster Zeit auftretenden Finanzinnovationen zu bewerten, deren Basiswerte eine Vielzahl von Preisprozessen darstellen. Dies wird an Hand realer Marktdaten demonstriert.

Im nächsten Hauptabschnitt 3 soll die Fragestellung beantwortet werden, inwieweit ein Zusammenhang zwischen bedingten Optionsproblemen, bspw. bei Vorliegen der klassischen Compound-Optionen, und den Mehrprozess-Problemen bestehen. Dies wird hier im Rahmen einer überabzählbaren Zeit- und Ergebnismenge durchgeführt, wobei als Prozess der oft eingesetzte Wiener-Prozess zu Grunde gelegt wird. Um diese Zusammenhänge aufzuzeigen, wird das Bewertungsproblem mit dem Martingalansatz gelöst. Im ersten Unterabschnitt 3.3.1 wird daher nachgewiesen, dass die Bewertung mit Hilfe eines äquivalenten Martingalmakes unter den Gegebenheiten möglich ist. Nachfolgend wird dieses Maß bestimmt. Die Markoveigenschaft des Wiener-Prozesses benützend wird darauf der Wert der Compound-Option ermittelt. Anschließend wird dieser mit den Werten aus den Lösungsvorschlägen nach *Geske* verglichen, der eine Lösung mit Hilfe des Differentialgleichungsansatzes ermittelt hat. Daneben schlägt *Geske* auch einen Lösung nach dem Martingalansatz vor.

Aufbauend auf der in Abschnitt 3.3.3 nach dem Martingalansatz bestimmten Lösung kann eine Übertragung der Lösung für Compound-Optionen auf weitere Optionsbewertungsprobleme vorgenommen werden. In einem ersten Schritt wird das Lösungsverfahren auf die Bewertung von Barrier-Optionen übertragen. Neben der direkten Übertragung der Problemlösung für klassische Compound-Optionen wird im Abschnitt 3.4.1 auch eine Verallgemeinerung auf  $n$  Zeitpunkte und weitere Optionstypen untersucht. Im zweiten Schritt wird der Zusammenhang zwischen Mehrprozess-Problemen und bedingten Optionsproblemen analysiert. Dabei wird die Übertragung der Bewertung der Compound-Optionen auf Optionen auf mehrere Aktien

untersucht. Der gleichen Methode folgend wird eine Übertragung auf das bekannte Problem der Bewertung von Maximum-Optionen nach *Stulz* unternommen.

Da sich Wiener-Prozesse in der Literatur als nicht immer adäquat für die Bewertung erwiesen haben, wird als eine Erweiterung das bedingte Optionsproblem untersucht, falls Lévy-Prozesse zu Grunde liegen. Dazu werden zunächst Lévy-Prozesse im Vergleich zum Spezialfall Wiener-Prozess definiert. Da die Randverteilungen von Lévy-Prozessen im Gegensatz zum Wiener-Prozess nur in Ausnahmefällen geschlossen darstellbar sind, wird daraufhin die charakteristische Funktion der Verteilung eingeführt. Diese Form der Darstellung ist meistens Grundlage für die nachfolgenden Berechnungen. Daneben erweist es sich als sinnvoll, auch Lévy-Prozesse in Form von stochastischen Differentialgleichungen darzustellen. Im letzten Teil dieses Abschnitts wird dann analysiert, ob und welche Lévy-Prozesse geeignet sind empirische Aktienkursverteilungen oder Aktienrenditeverteilungen abzubilden. Diese Analyse wird dabei für verschiedene Typen von Lévy-Prozessen an Hand der DAX-Daten der letzten 20 Jahre durchgeführt.

Analog zum Abschnitt 3 wird auch für Lévy-Prozesse eine Bewertung mit dem Martingalansatz angestrebt. Im ersten Unterabschnitt wird dazu untersucht, ob eine Bewertung mit dem Martingalansatz möglich ist. Da sich das Preissystem nicht als vollständig erweisen wird, müssen zusätzliche Kriterien zur Bewertung herangezogen werden. Nach der Diskussion verschiedener anderer Kriterien wird die Esscher-Transformation eingesetzt, um ein eindeutiges Martingalmaß bestimmen zu können. Für die Verteilungen, die sich bei der empirischen Analyse in Abschnitt 4.2.4 als untersuchenswert erwiesen haben, werden die Esscher-Transformationen durchgeführt und Martingalmaße hergeleitet.

Mit den nun so bestimmten Martingalmaßen wird im nächsten Hauptabschnitt 4.4 der Wert einer europäischen Kaufoption i. A. bestimmt. Dieses Bewertungsverfahren wird auf DAX-Optionen angewendet. Ein Vergleich mit den Bewertungsergebnissen aus der Welt von *Black, Scholes* und *Merton* beendet diesen Abschnitt.

Im letzten Abschnitt findet die Erweiterung der Bewertung auf bedingte Optionsprobleme statt. Zunächst wird für diesen Fall ein Martingalmaß bestimmt. Dazu wird wiederum die Esscher-Transformation herangezogen. Es folgt im nächsten Unterabschnitt die Bestimmung des Wertes von Compound-Optionen, wobei die charakteristischen Funktionen der Randverteilungen von Lévy-Prozessen benützt werden. Dieser Wert dient dazu, um dann auf Basis spezifischer Typen von Lévy-Prozessen, die sich in Abschnitt 4.5 als gut anpassbar erwiesen haben, die Ergebnisse zu analysieren. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

Nachfolgende Graphik gibt einen Überblick über die Abfolge der Abschnitte.



Abbildung 1.1: Kapitelübersicht

Sie richtet sich dabei nicht nach den Details der Unterabschnitte, sondern fasst zur besseren Übersichtlichkeit logische Einheiten zusammen. So werden hier Teilbereiche zur Beschreibung der Problemstellung, der Lösungsverfahren und von empirischen Tests unterschieden.



## Kapitel 2

# Abzählbare Zeit- und Zustandsmenge - Diskreter Prozess





## 2.1 Problemstellung

Im Bereich des Privatkundengeschäfts der Banken werden mehr und mehr Derivate vertrieben.<sup>1</sup> Diese Tendenz geht dabei einher mit einer Komplexitätszunahme der abgesetzten Finanzprodukte.<sup>2</sup> Immer häufiger werden dabei Derivate emittiert, die von mehreren Preisprozessen abhängen. Insbesondere bei Aktienanleihen tritt das Problem häufiger auf, dass das Auszahlungsprofil der Optionen von den zukünftigen Preisen von zwei Aktien abhängt.

Aber auch in weiteren Bereichen der Finanzierung besteht eine Notwendigkeit sich mit solchen Derivaten auseinanderzusetzen. So gibt es etwa im Bereich der Unternehmensfinanzierung und hier speziell bei den Realoptionen eine Notwendigkeit mehrere Preisprozesse bei der Bewertung zu berücksichtigen.<sup>3</sup>

Aber auch im Bankbereich existieren Bewertungsprobleme, bei denen mehrere Preisprozesse berücksichtigt werden müssen. So kann etwa bei der Bestimmung von Kreditrisikoprämien zum Einen der Prozess des Unternehmenswerts zum Anderen der Prozess der Sicherheit Einfluss auf die Prämie haben.<sup>4</sup>

Im Folgenden wird ein leicht zugängliches Verfahren zur Bewertung dieser Optionen erläutert, das dem Paradigma der Arbitragefreiheit von Märkten<sup>5</sup> folgt und ein vollständiges Preissystem gewährleistet. Dieser Ansatz kann darüber hinaus für die Bewertung von Bündeln aus Optionen oder von sogenannten Compound-Optionen eingesetzt werden.<sup>6</sup>

Im folgenden Abschnitt 2.2 wird zuerst erläutert, unter welchen Bedingungen eine derartige Problemstellung auftreten kann. Im Abschnitt 2.3 wird eine Fallstudie vorgestellt und die Problemstellung vertieft. Im nächsten Abschnitt 2.4 wird dann das eigentliche Bewertungsverfahren vorgestellt. Danach folgt die Darstellung eines Verfahrens zur Modellierung von Mehrprozess-Problemen, falls eine Vielzahl von Preisprozessen vorhanden sind. Dazu wird eine Zerlegung der Varianz-Kovarianz-Matrix der Preisprozesse angewendet, um aus vereinfachten Grundprozessen ein System von Prozessen mit den gewünschten Daten zu generieren. Als Zerlegung wird die Cholesky-Zerlegung benützt. Das gesamte Verfahren wird zunächst an Hand des Realoptionsbeispiels erläutert. Im Abschnitt 2.10 wird das Verfahren auf ein praktisches Beispiel zur Bewertung von Finanzinnovationen

---

<sup>1</sup>Vgl. bspw. **Kraft/Trautmann** (2001), S. 539 ff.

<sup>2</sup>Vgl. etwa **Stoimenov/Wilkens** (2004), S. 207.

<sup>3</sup>Vgl. etwa **Hommel/Müller** (2000), S. 72.

<sup>4</sup>Vgl. etwa **Skaruppe** (1994), S. 206.

<sup>5</sup>Zur Definition von Arbitragefreiheit vgl. **Dothan** (1990), S. 17 f. oder in der deutschsprachigen Literatur **Irle** (1998), S. 14.

<sup>6</sup>Vgl. hierzu die Ausführungen im Abschnitt 3.

angewendet.

## 2.2 Problembezogene Definition des Mehrprozess-Problems

Wie in Abschnitt 1.2.1 beschrieben, tritt ein Mehrprozess-Problem bei der Optionsbewertung auf, wenn, vereinfacht ausgedrückt, mehr als zwei Preisprozesse zu berücksichtigen sind. Dabei ist von Bedeutung, dass sämtliche Preise nicht vollständig voneinander abhängen.

Im Folgenden wird es sich als günstig erweisen auf eine abzählbare Zeit- und Zustandsmenge zurückzugreifen. Somit kann man sich zunächst auf diskrete Prozesse und Verteilungen beschränken.<sup>7</sup> Für den Fall einer abzählbareren Zeit- und Zustandsmenge lässt sich das Problem umschreiben.

**Definition 2.2.0.1.** Ein Mehrprozess-Problem i.e.S. existiert, falls für ein System von Preisprozessen  $x^i(t)$  mit  $i \in I$  und damit für die Matrix möglicher Preise  $X(t) = \langle x^i(t) \rangle$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  gilt:

$$(SRg(X(t)) = Rg(X(t))) > 2. \quad (2.2.1)$$

Dass diese Definition nur bei abzählbaren Zeit- und Zustandsmengen sinnvoll ist, liegt auf der Hand.<sup>8</sup>

Mehrprozess-Probleme können typischerweise auftreten bei Optionskonstruktionen, wie

- einzelnen Optionen, deren Auszahlungsprofil durch mehrere Preisprozesse determiniert ist;
- Bündeln aus mehreren Optionen,<sup>9</sup> deren jeweiliges individuelles Auszahlungsprofil<sup>10</sup> nur von einem Preisprozess, das Auszahlungsprofil des gesamten Bündels hingegen von mehreren beeinflusst werden kann. Ein derartiges Bündel kann auch als einzelne Option mit komplexen Ausübungsbedingungen verstanden werden;
- Compound-Optionen, also Optionen auf Optionen. Das Auszahlungsprofil der Compound-Option kann als von mehreren Preisprozessen

<sup>7</sup>Vgl. etwa **Bauer** (1991), S. 26.

<sup>8</sup>Vgl. in analoger Weise über die Vollständigkeit **Dothan** (1990), S. 19 f. und S. 52 ff.

<sup>9</sup>Vgl. zu Bündeln auch **Trigeorgis** (1993), S. 7 ff.

<sup>10</sup>Das Auszahlungsprofil muss hier nicht notwendigerweise nur von einem Preisprozess beeinflusst werden.

abhängig aufgefasst werden:<sup>11</sup> Vom Prozess für den Preis des zugrundeliegenden Basiswerts zum Ausübungszeitpunkt der Compound-Option und vom Prozess für den Preis der durch Ausübung bezogenen Option zum Ausübungszeitpunkt.<sup>12</sup> Bei dieser Sichtweise kann das Bewertungsproblem von Compound-Optionen unter das Mehrprozess-Problem subsumiert werden.

Bündel aus Optionen, aber auch Compound-Optionen, können somit grundsätzlich als einzelne Optionen angesehen werden, die von mehreren Preisprozessen abhängig sind.<sup>13</sup> Hierbei ist jedoch zu beachten, dass diese Preisprozesse aus bewertungstechnischer Sicht zwar als eigenständige Preisprozesse angesehen werden können, aus ökonomischer Sicht hingegen keine eigenständigen Preisprozesse darstellen müssen.<sup>14</sup>

Im Folgenden werden Optionen, die einem Mehrprozess-Problem unterliegen, an Hand einer Fallstudie dargestellt. Damit Verfahren, die auf dem Arbitragefreiheitsgedanken basieren,<sup>15</sup> eingesetzt und damit Optionen nach dem Paradigma der Arbitragefreiheit bewertet werden können, müssen die Voraussetzungen für einen Einsatz als sinnvoll angenommen werden können. Dies muss sowohl aus Sicht des Entscheiders, als auch hinsichtlich der Erfüllung der Prämissen<sup>16</sup> zutreffen. Die Fallstudie ist aus dem Bereich Realoptionen der Immobilienwirtschaft gewählt. In dieser Branche können die Bedingungen zur Anwendung derartiger Verfahren als relativ gut erfüllt angesehen werden.<sup>17</sup>

## 2.3 Einführung in die Fallstudie

Ein Unternehmen *U* hat ein Grundstück mit einer darauf erbauten Lagerhalle im Bestand. Die Immobilie ist im Erbbaurecht errichtet und *U* hat

<sup>11</sup> In diesem Unterabschnitt wird aus Gründen einer übersichtlichen Darstellung lediglich eine Compound-Option auf einen zugrundeliegenden Vermögenswert untersucht.

<sup>12</sup> Im Falle einer Compound-Option im Sinne von *Geske*, also einer Option auf eine Option auf lediglich einen zugrundeliegenden Vermögenswert, folgt dessen Preis einer geometrischen Brownschen Bewegung (mit stetigen Pfaden), vgl. *Geske* (1979), S. 63. Alternativ kann dieser als zwei Preisprozesse mit zwei geometrischen Brownschen Bewegungen interpretiert werden, deren relative Veränderungen mit der Wurzel des Laufzeitverhältnisses korreliert sind. Vgl. *Bauer* (1991), S. 352 f. Für eine genauere Beschreibung dieser Zusammenhänge vgl. Abschnitt 3.

<sup>13</sup> Ob eine derartige Modellierung für den Bewerter effizient ist, ist vom Einzelfall abhängig.

<sup>14</sup> Dies ist - wie in Fußnote 12 erwähnt - bei der Compound-Option der Fall.

<sup>15</sup> Diese werden auch oft auch als Optionsbewertungsverfahren bezeichnet. Vgl. zu einer differenzierten Betrachtung *Perridon/Steiner* (2003), S. 330 ff.

<sup>16</sup> Zu den Prämissen vgl. z.B. *Kilka* (1995), S. 78 ff.; zu Problemen bei der Anwendung vgl. *Hommel/Pritsch* (1999), S. 123 ff.

<sup>17</sup> Vgl. *Rathgeber/Wagner* (2001), S. 497 f.

dieses Recht noch für weitere 24 Jahre. *U* hat vor 16 Jahren die Halle für einen Zeitraum von insgesamt 20 Jahren an den Mieter *M* vermietet (4 Jahre Restlaufzeit).

*U* kann nach Ablauf des Mietvertrages in die Umnutzung der Lagerhalle in ein Bürogebäude investieren (Umnutzungsoption). Der Wert dieses Wahlrechts der Nutzung ist abhängig von der Mietpreisentwicklung für Lagerhallen und für Bürogebäude. Das Unternehmen *U* wird nur dann die Investition tätigen, wenn der Barwert der potenziellen Mieteinnahmen als Bürogebäude denjenigen der Lagerhalle zuzüglich der Investitionskosten (Basispreis) übersteigt.

Die Umnutzungsoption stellt ein Beispiel für eine Realoption dar, deren Auszahlungsprofil von mehreren Preisprozessen abhängt. Dem bisherigen Mieter *M* wurde gleichzeitig die Möglichkeit eingeräumt, den Mietvertrag zum Ende der Laufzeit zu verlängern (Mietverlängerungsoption). Die Option der Umnutzung des Gebäudes existiert für *U* lediglich dann, wenn der Mieter seine Option zur Verlängerung des Mietvertrags nicht ausgeübt hat. Die Mietverlängerungsoption beeinflusst die Umnutzungsoption in ihrer Ausübung und damit in ihrem Wert. Steigt die Mietverlängerungsoption des Mieters im Wert, sinkt gleichzeitig der Wert der Umnutzungsoption des Vermieters der Immobilie. Mit der vermieteten Immobilie sind somit mehrere Wahlrechte verbunden - diese stellen ein Bündel aus Realoptionen dar. Solch ein Bündel aus Umnutzungs- und Mietverlängerungsoption kann z.B. aus Sicht des Vermieters ebenso wie eine einzige Option, eine gekappte Umnutzungsoption, angesehen werden.

Das Bündel aus Mietverlängerungs- und Umnutzungsoption kann gleichzeitig als Compound-Option angesehen werden.<sup>18</sup> Jedoch entsteht hier durch die Ausübung der ersten Option (Mietverlängerungsoption) nicht das Recht zur Ausübung der zweiten Option (Umnutzungsoption), sondern es geht hierdurch unter. Damit kann auch die Compound-Option entweder als Bündel von Optionen angesehen werden oder als eine einzige Option mit komplexen Ausübungsbedingungen - jeweils abhängig von einem oder mehreren Preisprozessen.

Zum besseren Verständnis der Fallstudie soll der Sachverhalt mit Prozess- und Bewertungsparametern verdeutlicht werden.

Für den Prozess 1, den Preisprozess der Lagerhalle (Abschluss in 4 Jahren) wird eine relative Preisänderung in den nächsten vier Jahren zu 5% p.a.

<sup>18</sup> Diese Sichtweise entfernt sich von der Definition von Compound-Optionen im Sinne von *Geske*. vgl. hierzu Fußnote 12. Als solche Compound-Option könnte das Anrecht des Mieters auf eine weitere Option angesehen werden, z.B. auf eine Ausgleichszahlung, falls die Ortsmiete unterhalb eines gewissen Betrags bleibt und dieser zuvor die Mietverlängerungsoption ausgeübt hat. Wird die Mietverlängerungsoption vom Mieter nicht ausgeübt, der Mietvertrag also beendet, so kann die zweite Option gar nicht erst ausgeübt werden, da kein Mietverhältnis mehr besteht.

erwartet, die als stetige Rendite aufzufassen ist. Die Standardabweichung der relativen Preisänderungen für die nächsten vier Jahre ist 10% p.a. und der Barwert der am Markt erzielbaren Jahresmiete für einen Mietvertrag mit 20 Jahren Laufzeit beträgt zum Zeitpunkt der Bewertung 936,5 T Euro.

Für den Prozess 2, den Preisprozess des Bürogebäudes (Abschluss in 4 Jahren) wird eine relative Preisänderung in den nächsten vier Jahren zu 10% p.a. erwartet. Die Standardabweichung der relativen Preisänderungen für die nächsten vier Jahre ist 25% p.a. und der Barwert der Mieteinnahmen als Bürogebäude beträgt zum Bewertungsstichtag 1.967 T Euro.

Der Korrelationskoeffizient der beiden relativen Preisprozesse (Lagerhalle/Bürogebäude) beträgt 0,3. Der stetige risikolose Zinssatz  $r$  ist konstant und beträgt 4% p.a. Aus Vereinfachungsgründen werden keine weiteren Ein- oder Auszahlungen, wie z.B. Erhaltungsaufwendungen, für die Immobilie angesetzt.

Zur Bewertung der Optionen werden zudem die folgenden Informationen benötigt:

- Die Ummutzungskosten sind 240% des Barwertes der Mieteinnahmen aus der Lagerhalle. Bezieht man die entgehenden Mieteinnahmen aus der Lagerhalle ein, so entspricht dies 340% des ursprünglichen Barwertes;
- Sofern  $M$  seinen Mietvertrag um 20 Jahre verlängert, beträgt in 4 Jahren der daraus resultierende Barwert der Mietzahlungen 1.030 T Euro;
- Eine vorzeitige Ausübung der Optionen ist vertraglich ausgeschlossen.

Auf Basis der oben angeführten Parameter ergibt sich die Tabelle 2.1 mit folgenden Werten:

	Wert (Euro)	% von 936,5 Euro
Umnutzungsoption <i>mit</i> Verlängerungsoption	90,83	9,7%
Umnutzungsoption <i>ohne</i> Verlängerungsoption	38,12	4,1%
Verlängerungsoption	-107,96	-11,5%
Umnutzungsoption <i>und</i> Verlängerungsoption	-69,84	7,5%

Tabelle 2.1: *Realloptionspreise für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren*

Betrachtet man die Veränderung des Wertbeitrags der Umnutzungsoption durch die Berücksichtigung der Mietverlängerungsoption, so erkennt man, dass die Umnutzungsoption fast ein Drittel weniger wert ist. Dies ergibt sich aus den dargestellten Interaktionen der verschiedenen Bestandteile des Bündels an Realloptionen und damit letztendlich der korrekten Betrachtung des Mehrprozess-Problems.

In verschiedenen Beiträgen<sup>19</sup> wurde zur Bewertung von Optionen bei vorhandenem Mehrprozess-Problem meist auf Standardverfahren der Optionsbewertung auf eine Aktie, wie z.B. das Cox/Ross/Rubinstein-Modell<sup>20</sup> oder das Black/Scholes- und-Merton-Modell<sup>21</sup>, auch in leicht modifizierter Form,<sup>22</sup> zurückgegriffen.

Dies wird im folgenden Abschnitt gezeigt. Zur Lösung des Mehrprozess-Problems wird ein didaktisch leicht zugängliches Verfahren eingeführt. Mit dessen Hilfe können dann Bündel aus mehreren Optionen, Compound-Optionen und Optionen bewertet werden, deren Werte von mehreren Preisprozessen abhängen. Das Verfahren zur Lösung des Mehrprozess-Problems wird im Abschnitt 2.5 zur Ermittlung des Wertes der Optionen angewendet und der Lösungsweg vorgestellt.

<sup>19</sup>Vgl. etwa Koch (2001), S. 86 f. und speziell im Bereich der Realloptionen Löhrr (1999), S. 657 f. oder Meise (1998), S. 146.

<sup>20</sup>Vgl. Cox/Ross/Rubinstein (1979), S. 229 ff. Trotz der Bezeichnung Cox/Ross/Rubinstein-Modell soll allerdings nicht übersehen werden, dass Rendleman/Bartter fast zeitgleich ein ähnliches Modell präsentierten. Vgl. Rendleman/Bartter (1979), S. 1093 ff.

<sup>21</sup>Vgl. Black/Scholes (1973), S. 637 ff. und Merton (1973), S. 141 ff.

<sup>22</sup>Vgl. Margrabe (1978), S. 177 ff.

## 2.4 Diskrete Modellierung von Optionen auf mehrere Preisprozesse

### 2.4.1 Modellierung mit zwei Zuständen

Dem Ziel dieses Hauptabschnitts entsprechend, wird eine Modellierung in diskreter Zeit gewählt, also mit einer abzählbaren Menge von Zeitpunkten, zu denen sich der Preisprozess ändert. Die Zeitabschnitte zwischen den Zeitpunkten werden als Zeitschritte bezeichnet. Diese Vorgehensweise wird sich als günstig erweisen, weil die Modellierung in kontinuierlicher Zeit weniger leicht zugänglich scheint<sup>23</sup> und eine geringere Flexibilität zur Anpassung der Modelle an die Ausübungsbedingungen besteht.<sup>24</sup>

Um den Einstieg in dieses Verfahren zu erleichtern, wird die Zustandmenge, hier ein Zustandsraum, so ausgestaltet, dass zu jedem Zeitpunkt nur endlich viele Zustände mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht werden können.<sup>25</sup> Verbindet man die Zustände als Punkte im Zeit-Zustandsraum mit ihren jeweiligen zeitlich und kausal unmittelbar vorangehenden Zuständen, so ergibt sich als Graph ein Baum.<sup>26</sup> Dieser Modellaufbau steht damit in der Tradition des weit verbreiteten Cox/Ross/Rubinstein-Modells.<sup>27</sup>

Wie bereits erwähnt, entsteht bei der Modellierung des stochastischen Prozesses für ein Mehrprozess-Problem in Form eines Binomialbaumes, also einer Modellierung durch je zwei unmittelbar auf einen Zustand nachfolgende Zustände, ein Problem,<sup>28</sup> das einer ausführlichen Erläuterung bedarf. Da per Definitionem für ein Mehrprozess-Problem mehr als zwei, bspw. drei Preise,<sup>29</sup> von Bedeutung sind, wird die gegenüber dem Binomialbaum geänderte indexbasierte Bezeichnung  $V_{t,j}^i$  für den Preis des  $i$ -ten Vermögenswertes zum Zeitpunkt  $t$  in einem Zustand  $j$  eingeführt. Nach dem ersten Zeitschritt ergeben sich dann die Preisvariablen der Preisprozesse für den

<sup>23</sup>Ein Beispiel im Fall von Realoptionen findet sich bei **Lucke** (2001), S. 124 ff.

<sup>24</sup>Es besteht für den Bewerter immer die Möglichkeit, rein numerisch vorzugehen, also z.B. eine Monte-Carlo-Simulation durchzuführen. Bei dieser Vorgehensweise gehen jedoch ökonomische Überlegungen unter. Vgl. z.B. **Boyle et al.** (1988), S. 241 ff.

<sup>25</sup>Vgl. bspw. **Bauer** (1991), S. 26.

<sup>26</sup>Vgl. zum Baumbegriff **Jäger** (1980), S. 142.

<sup>27</sup>Vgl. **Cox/Ross/Rubinstein** (1979). Eine ausführliche Darstellung findet sich bei **Dothan** (1990), S. 133 ff. oder im deutschsprachigen Raum **Irle** (1998), S. 63 f. Eines der ersten Modelle mit dieser Intension stammt von **Duffie/Huang**. Vgl. **Duffie/Huang** (1985), S. 1339 ff.

<sup>28</sup>Eine Ausnahme stellen hier Bewertungsmodelle dar, bei denen sich immer wechselseitig im Vorgängerzeitpunkt der eine Preisprozess, im nachfolgenden Zeitpunkt der andere Preisprozess verändert. Eine solche Modellierung wird auch als sequentielle Optionsbewertung bezeichnet. Vgl. z.B. **Cheyette** (1990), S. 71 f.

<sup>29</sup>Im nachfolgenden Beispiel wird zunächst aus Gründen der Übersichtlichkeit die Wertentwicklung von drei Preisprozessen betrachtet. Eine Ausdehnung dieser und nachfolgender Überlegungen auf  $n$  Preisprozesse ist aber jederzeit möglich.

jeweiligen Vermögenswert, die folgender Tabelle 2.2 zu entnehmen sind:

	Zustand 1	Zustand 2
Basiswert 1	$V_{1,1}^1$	$V_{1,2}^1$
Basiswert 2	$V_{1,1}^2$	$V_{1,2}^2$
Risikolose Anleihe	$V_{1,1}^3 = V_{1,2}^3$	

Tabelle 2.2: Variablen der Preisprozesse für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren

Unter Benutzung dieser Preise nach dem ersten Zeitschritt erhält man drei Gleichungen zur Bestimmung der Martingal- bzw. Pseudowahrscheinlichkeiten<sup>30</sup>  $q_j$  für den mit  $r$ <sup>31</sup> diskontierten Preisprozess:

$$\begin{aligned}
 V_{0,1}^1 &= [q_1 V_{1,1}^1 + q_2 V_{1,2}^1] \exp(-r) \\
 V_{0,1}^2 &= [q_1 V_{1,1}^2 + q_2 V_{1,2}^2] \exp(-r) \\
 V_{0,1}^3 &= [q_1 V_{1,1}^3 + q_2 V_{1,2}^3] \exp(-r) \\
 &= q_1 V_{0,1}^3 + q_2 V_{0,2}^3 \iff q_1 + q_2 = 1.
 \end{aligned}
 \tag{2.4.1}$$

Dies stellt ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit zwei Unbekannten, den Martingalwahrscheinlichkeiten, dar und ist damit überbestimmt. Nun lässt sich aber zeigen, dass obiges System aus Preisen der Vermögenswerte, oder kurz Preissystem, dann und nur dann arbitragefrei ist, falls die Martingalwahrscheinlichkeiten im Sinne der Wahrscheinlichkeitsdefinition bestimmt werden können.<sup>32</sup>

Obiges überbestimmtes Gleichungssystem (2.4.1) hat nur dann eine Lösung, falls mindestens zwei dieser Gleichungen linear abhängig sind. Lineare Abhängigkeit bedeutet aber, dass einer der Vermögenswerte einen bedingten Anspruch, einen Contingent Claim, auf die beiden anderen darstellt. Dies ist bspw. dann der Fall, falls der Preisprozess 1 stets - das impliziert auch

<sup>30</sup>Zur Definition vgl. etwa Dothan (1990), S. 23 ff.

<sup>31</sup>Der Diskontierungszinssatz  $r$  wird in bekannter Weise aus dem dritten, risikolosen Vermögenswert gewonnen. Vgl. Irle (1998), S. 64.

<sup>32</sup>Für den hier aufgeführten Einperiodenfall vgl. z.B. Irle (1998), S. 70 sowie Irle (1998), S. 105 für den Mehrperiodenfall. Oder vgl. im Original Harrison/Kreps (1979), S. 392 ff.



unabhängig vom Zustand - ein Vielfaches des Preisprozesses 2 darstellt. Damit ist einer der Preisprozesse kein eigenständiger, sondern ein abgeleiteter Preisprozess und das Mehrprozess-Problem nur ein Zweiprozess-Problem.

33

## 2.4.2 Modellierung mit drei Zuständen

Um die Arbitragefreiheit bei Existenz von  $n$  Preisprozessen, deren jeweilige Zustandsausprägungen in jedem Zeitpunkt voneinander linear unabhängig sind, erreichen zu können, muss die Zahl der Zustände zu  $m \geq n$  gewählt werden. Allerdings ist die Eindeutigkeit einer Lösung für das Gleichungssystem bei der Wahl  $m > n$  nicht gesichert. Ein solches Vorgehen kann sich unter gewissen Umständen als sinnvoll erweisen,<sup>34</sup> worauf in diesem Abschnitt nicht näher eingegangen wird.

Denn Ziel dieses Abschnitts ist es ein leicht zugängliches Verfahren aufzuzeigen, so dass wie bei dem weit verbreiteten Ansatz von *Cox/Ross/Rubinstein* nur Preissysteme mit eindeutiger Lösung betrachtet werden. Um zu erreichen, dass die Lösung für das Gleichungssystem (2.4.1) eindeutig ist, werden im Folgenden, in der Grundkonzeption bekannten Ansatz,<sup>35</sup>  $n$  Preisprozesse durch je  $m = n$  unmittelbar auf einen Zustand folgende Zustände mit linear unabhängigen Preisen<sup>36</sup> modelliert.<sup>37</sup>

Wie oben ausgeführt, beschränkt sich die folgende Darstellung aus Vereinfachungsgründen auf die Modellierung von drei Preisprozessen. Im Einzelnen werden die Zustände für die Preisprozesse einer risikolosen Anlagemöglichkeit und zweier risikobehafteter Vermögenswerte durch drei Zustände abgebildet. Im Vergleich zu der Betrachtungsweise des Binomialmodells

<sup>33</sup>Vgl. **Hommel/Müller** (2000), S. 76. *Hommel/Müller* betrachten in ihrem Beispiel genau diesen Fall. Ein weiteres Verfahren, das mit einem Binomialbaum arbeitet, stellt *Koch* vor. *Koch* beginnt seine Aufgabenstellung mit drei Vermögenswerten, zwei risikanten und einem durch die Existenz des risikolosen Zinssatzes determinierten, risikolosen Vermögenswert. Es ist nicht nachvollziehbar, warum *Koch* nicht erwähnt, dass er bei der Berechnung den dritten risikolosen Vermögenswert nicht mehr in Betracht zieht - oder besser - ziehen kann. Denn nur durch das Weglassen dieses Wertes und damit den Verzicht auf die dritte Gleichung des Systems (2.4.1) kann immer eine Lösung gefunden werden. Vgl. **Koch**, (2001), S. 85 ff.

<sup>34</sup>Unter Aufgabe der Martingalbedingung können eventuell leistungsfähigere Bäume erzeugt werden. Vgl. **Longstaff** (1995), S. 1093 ff. Bekannte Beispiele dafür sind **Boyle et al.** (1988), S. 241 ff. oder **Rubinstein** (1994), S. 67 ff., der einen Quadrinomialbaum konstruiert.

<sup>35</sup>Vgl. **Dothan** (1990), S. 48 ff.

<sup>36</sup>Vgl. **Dothan** (1990), S. 19 f. Ein solches Preissystem wird bekanntlich auch als vollständig bezeichnet.

<sup>37</sup>Beispiele für Autoren, die eine ähnliche Vorgehensweise verwenden, sind **Ekvall** (1996) S. 214 ff. oder **He** (1990) S. 523 ff., der ein Polynomialmodell konstruiert. *Kobel* liefert einen Literaturüberblick, vgl. **Kobel** (1996), S. 16 ff. und S. 44 f.

erweitern wir in der Zeit-Zustandsmenge die Anzahl der unmittelbar auf einen Zustand folgenden Zustände um einen weiteren, den Zustand 3. In diesem Fall ergibt sich der Preis des  $i$ -ten Vermögenswertes zum Zeitpunkt 1 zu  $V_{1,3}^i$ . Der Graph wird zu einem Trinomialbaum.

Des Weiteren soll die zeitliche Entwicklung so erfolgen, dass jeder Prozess der relativen Veränderungen der Preise, den stetigen Renditen bei Aktienkursen, stationär ist.<sup>38</sup> Dies wird im Folgenden dadurch erzielt, dass die Wahrscheinlichkeiten in jedem Zeitschritt konstant bleiben und die Preise des Vorgängerzustandes in Abhängigkeit vom Zustand  $j$  und vom Vermögenswert  $i$  in jedem Zeitschritt mit dem gleichen Faktor für die relative Preisänderung  $\exp(E_i + a_j^i)$  multipliziert werden.<sup>39</sup> Dies ist hier für die Situation nach dem ersten Zeitschritt beispielhaft für den Vermögenswert 1 dargestellt:

$$\begin{aligned} V_{1,1}^1 &= \exp(E^1 + a_1^1) V_{0,1}^1 \\ V_{1,2}^1 &= \exp(E^1 + a_2^1) V_{0,1}^1 \\ V_{1,3}^1 &= \exp(E^1 + a_3^1) V_{0,1}^1. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Diese Vorgehensweise zur Bestimmung der Zustände nach den ersten beiden Zeitschritten für alle drei Vermögenswerte kann der nachfolgenden Abbildung 2.1 entnommen werden:<sup>40</sup>

<sup>38</sup> Vgl. zur Definition von Stationarität etwa **Hamilton** (1994), S. 45 ff.

<sup>39</sup> Dieses Vorgehen stimmt mit dem Cox/Ross/Rubinstein-Modell überein. Vgl. **Cox/Ross/Rubinstein** (1979), S. 249.

<sup>40</sup> Man beachte jedoch, dass hier auf die mögliche Darstellung einer eventuell vorhandenen Rekombinierbarkeit verzichtet wurde. Die Rekombinierbarkeit führt allerdings dazu, dass der Graph aus Sicht der Topologie keinen Baum mehr darstellt. Vgl. **Jäger** (1980), S. 142 f.

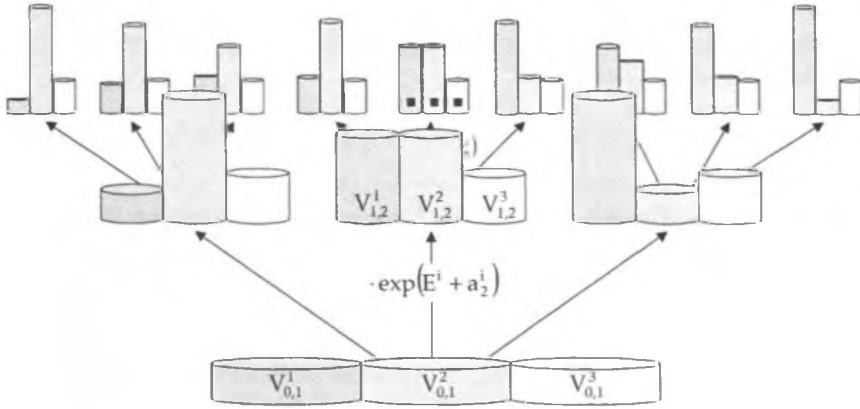


Abbildung 2.1: Aufbau des Trinomialbaumes für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren

Die Kalibrierung der Preisprozesse mit Hilfe der gewünschten, bspw. historisch beobachteten Momente der Verteilung der jeweiligen Preise zu einem Zeitpunkt, erfolgt dabei analog zu der Vorgehensweise beim Cox / Ross / Rubinstein-Modell.<sup>41</sup> Der Erwartungswert  $E^i$  der relativen Veränderungen sollte für den jeweiligen Preisprozess  $i$  dem erwünschten Erwartungswert  $E^i$  entsprechen. Unter Berücksichtigung im Zeitablauf konstanter Zustandsvariablen  $a_j^i$  für die Preisänderungen und deren Wahrscheinlichkeiten  $p_j$  ergeben sich die beiden Gleichungen:<sup>42</sup>

$$a_1^1 p_1 + a_2^1 p_2 + a_3^1 (1 - p_1 - p_2) = 0 \quad (2.4.3)$$

$$a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + a_3^2 (1 - p_1 - p_2) = 0. \quad (2.4.4)$$

Ebenso wird mit der Standardabweichung bzw. Varianz  $var^i$  der Preisänderungen von  $i$  verfahren:

$$(a_1^1)^2 p_1 + (a_2^1)^2 p_2 + (a_3^1)^2 (1 - p_1 - p_2) = var^1 \quad (2.4.5)$$

$$(a_1^2)^2 p_1 + (a_2^2)^2 p_2 + (a_3^2)^2 (1 - p_1 - p_2) = var^2. \quad (2.4.6)$$

<sup>41</sup>Zur Kalibrierung des Cox / Ross / Rubinstein-Modells vgl. etwa **Chriss** (1997), S. 233 f. oder **Copeland / Weston** (1988), S. 260 ff.

<sup>42</sup>Der Preisprozess für den risikolosen dritten Vermögenswert besitzt in jedem Zustand  $j$   $a_j^3 = 0$  und damit entsprechend der Formeln (2.4.5) eine Varianz  $var^3 = 0$ .

Bedingt durch die Mehrprozess-Problematik ergibt sich abweichend vom Modell von *Cox/Ross/Rubinstein* unter Zuhilfenahme des gewünschten Korrelationskoeffizienten bzw. der gewünschten Kovarianz  $cov^{12}$  der Preisänderungen folgende Gleichung:

$$a_1^1 a_1^2 p_1 + a_2^1 a_2^2 p_2 + a_3^1 a_3^2 (1 - p_1 - p_2) = cov^{12}; \quad (2.4.7)$$

für den dritten Vermögenswert gilt  $cov^{13} = cov^{23} = 0$ .

Wenn diese Gleichungen erfüllt sind,<sup>43</sup> können drei zusätzliche Bedingungen für die Zustandsvariablen der Preisänderungen und/oder die Wahrscheinlichkeiten frei aufgestellt werden<sup>44</sup> und man erhält einen Prozess, der die gewünschten Momente aufweist.<sup>45</sup> Grundsätzlich ist jede Wahl möglich. Der Intention dieses Abschnitts entsprechend, einen möglichst einfachen, an der Vorgehensweise von *Cox/Ross/Rubinstein* orientierten Ansatz zu präsentieren, werden die Wahrscheinlichkeiten  $p_j = \frac{1}{3}$  und  $a_2^2 = 0$  gewählt.<sup>46</sup> Durch diese Wahl wird die Ermittlung der restlichen Zustandsvariablen und damit die rechentechnische Behandlung erheblich vereinfacht, wie man sofort nach Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (2.4.4), (2.4.6) und (2.4.7) erkennt. Außerdem ist dadurch die Existenz einer Lösung mit positiven Wahrscheinlichkeiten immer sichergestellt.<sup>47</sup> Die verschiedenen Lösungen unterscheiden sich dabei nur durch Permutation und/oder Vorzeichenwechsel. Mit dieser Lösung kann der Baum gemäß Abbildung 2.1 bzw. Formel (2.4.2) aufgestellt werden.

Auf der Basis des so konstruierten Trinomialbaumes können dann im letzten Schritt, wie oben erläutert, die Martingalwahrscheinlichkeiten  $q_j$  für den mit dem existierenden risikolosen Zinssatz  $r$  diskontierten Preisprozess eindeutig bestimmt werden. Aufgrund der zeitlichen Konstanz des Summanden  $a_j^i$  für die relative Preisänderung liefert die Bestimmung zu allen

<sup>43</sup>Nicht aufgeführt ist die Bedingung der Normiertheit des Wahrscheinlichkeitsmaßes auf 1.

<sup>44</sup>Diese freie Wahl der Wahrscheinlichkeiten findet sich auch bei der im *Cox/Ross/Rubinstein*-Modell gewählten Vorgehensweise, vgl. *Cox/Ross/Rubinstein* (1979), S. 235.

<sup>45</sup>Die Verschiebungsinvarianz der Momente bzw. das Ansteigen der Varianz und Kovarianz mit Faktor 2 folgt direkt aus der Tatsache dass die relativen Preisänderungen u.i.v. sind.

<sup>46</sup>Vgl. *He* (1990), S. 531. Für eine größere Anzahl von Modellzuständen vgl. exemplarisch *Boyle/Tse* (1990), S. 216 f. und *Rubinstein* (1994), S. 67 f.

<sup>47</sup>Diese und nachfolgende Behauptungen können mit den im Anhang A.1 dargestellten Formeln leicht bewiesen werden.

Zeitpunkten und damit auch zum ersten das selbe Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 V_{0,1}^1 &= \exp(-r) \\
 &\quad \left[ q_1 \exp(E^1 + a_1^1) V_{0,1}^1 + q_2 \exp(E^1 + a_2^1) V_{0,1}^1 + q_3 \exp(E^1 + a_3^1) V_{0,1}^1 \right] \\
 V_{0,1}^2 &= \exp(-r) \\
 &\quad \left[ q_1 \exp(E^2 + a_1^2) V_{0,1}^2 + q_2 \exp(E^2 + a_2^2) V_{0,1}^2 + q_3 \exp(E^2 + a_3^2) V_{0,1}^2 \right] \\
 V_{0,1}^3 &= \exp(-r) \\
 &\quad \left[ q_1 \underbrace{\exp(E^3 + a_1^3)}_{=F} V_{0,1}^3 + q_2 \underbrace{\exp(E^3 + a_2^3)}_{=F} V_{0,1}^3 + q_3 \underbrace{\exp(E^3 + a_3^3)}_{=F} V_{0,1}^3 \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.4.8}$$

Mit Hilfe der so bestimmten Martingalwahrscheinlichkeiten  $q_j$  können dann sämtliche der beschriebenen Optionen, die von mehreren Preisprozessen abhängig sind, durch einfache Erwartungswertbildung über alle diskontierten Auszahlungen aus den Optionen bestimmt werden.<sup>48</sup>

## 2.5 Lösung der Fallstudie

Im Folgenden wird das oben dargestellte Verfahren anhand einer Fallstudie erläutert. Nachfolgende Übersicht, Tabelle 2.3, fasst die bewertungsrelevanten Größen aus dem Abschnitt 2.3 zusammen:<sup>49</sup>

	PV(RA)	$E^i$	$var^i$	$cov^{12}$	$B(R)$	$B(E)$
Basiswert 1	936,5	0,05	0,0100	0,0075	2,4000	1.030
Basiswert 2	1.967	0.10	0,0625			
Risikolose Anlage		0,04	0.0000			

Tabelle 2.3: Übersicht über die Preisprozess- und Optionsparameter für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren

Die relative Ausübungsbedingung für die Ummutzungsoption ist mit  $B(R)$  und die Bedingung für die Verlängerungsoption in Euro mit  $B(E)$  bezeichnet. Die Barwerte des Mietvertrages werden mit PV(RA) symbolisiert.

<sup>48</sup>Vgl. z.B. **Dothan** (1990), S. 24 ff.

<sup>49</sup> $var^i$  und  $cov^{12}$  ergeben sich aus Standardabweichung und Korrelationskoeffizient.

An dieser Stelle sei noch angeführt, dass eine Reduktion auf ein Zweipreisprozess-Problem und eine Behandlung als Margrabe-Option<sup>50</sup> in diesem Fall nicht möglich ist. Zwar beträgt der Ausübungspreis der Ummutzungs-option 240% des Wertes der Lagerhalle und stellt einen relativen Anteil dar. Daher könnte u.U. auf den risikolosen Vermögenswert (Preisprozess 3) verzichtet werden und für diesen Sachverhalt das Mehrprozess- auf ein Zweipreisprozess-Problem reduziert werden, bei dem der eine Preisprozess durch den Quotienten aus den Preisen von Lagerhalle und Bürogebäude definiert wird. Die Reduktion auf ein Zweipreisprozess-Problem ist jedoch nicht möglich, da der Ausübungspreis der Mietverlängerungsoption mit 1.030 T Euro einen absoluten Betrag darstellt. Weil  $M$  seine Mietverlängerungsoption ausüben kann, obwohl aus Sicht des  $U$  die Errichtung eines Bürogebäudes wirtschaftlich sinnvoll ist, ist für die Bewertung des Portfolios aus beiden Optionen nicht nur die Höhe des Quotienten, sondern zusätzlich die absolute Höhe des Prozesses 1 relevant.

Bewertet werden zwei Optionen, die sich auf drei Preisprozesse beziehen. Damit handelt es sich um ein Mehrprozess-Problem, das mit dem oben angegebenen Verfahren als Trinomialbaum behandelt werden kann. Bei der Kalibrierung des Baumes ergeben sich folgende Werte für die Zustandsvariablen der Preisänderungen  $a_j^i$  und die Wahrscheinlichkeiten  $p_j$ :<sup>51</sup>

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$a_j^1$	-0,10420	0,13491	-0,03071
$a_j^2$	-0,30619	0,00000	0,30619
$p_j$	0,33333	0,33333	0,33333

Tabelle 2.4: Zustandsvariablen der Preisprozesse und Wahrscheinlichkeiten für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren

Somit ergibt sich entsprechend Abbildung 2.1 bzw. Formel (2.4.2) der folgende Baum nach zwei Schritten (in T Euro) gemäß Abbildung 2.2.

<sup>50</sup>Vgl. Margrabe (1978), S. 178 f.

<sup>51</sup>Es wurden die Lösungen (A.1.5)-(A.1.8) aus dem Anhang A.1 verwendet.

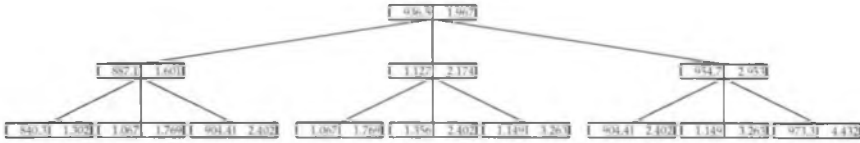


Abbildung 2.2: Mit Beispelsdaten kalibrierter Trinomialbaum für zwei Jahre nach dem allgemeinen Verfahren

Die Martingalwahrscheinlichkeiten  $q_j$  ermitteln sich nach Formel (2.4.8):

$q_1$	$q_2$	$q_3$
49,14%	30,94%	19,92%

Tabelle 2.5: Übersicht über die Martingalwahrscheinlichkeiten für die Fallstudie nach dem allgemeinen Verfahren

Für die Bewertung der Optionen müssen zunächst die Auszahlungsprofile  $\bar{B}$  aus Sicht des Vermieters  $U$  ermittelt werden. Für die Auszahlungen aus den Optionen sind ausschließlich die Zustände nach dem vierten Jahr relevant, da eine vorzeitige Ausübung aufgrund der vertraglichen Bindungen ausgeschlossen ist. Die Mietverlängerungsoption wird durch den Mieter  $M$  immer dann ausgeübt, falls der Barwert der Mietzahlungen für die Lagerhalle den Barwert der Mietzahlungen bei Mietverlängerung von 1.030 T Euro überschreitet:

$$\bar{B}(E) = \begin{cases} 0 & \text{für } V_{4,j}^1 \leq 1.030 \\ 1.030 - V_{4,j}^1 & \text{für } V_{4,j}^1 > 1.030. \end{cases}$$

Die Umnutzungsoption auszuüben ist immer günstig, falls der Barwert der Mietzahlungen aus dem Bürogebäude den Barwert der Mietzahlungen aus der Lagerhalle zuzüglich der Umnutzungskosten überschreitet. Die Umnutzungsoption ist aber nur durch  $U$  ausübbar, falls die Mietverlängerungsoption nicht durch  $M$  ausgeübt wurde. Die Auszahlung  $\bar{B}(R)$  beträgt damit

$$\bar{B}(R) = \begin{cases} 0 & \text{für } V_{4,j}^1 > 1.030 \\ 0 & \text{für } V_{4,j}^1 \leq 1.030 \text{ und } V_{4,j}^2 \leq 3.4V_{4,j}^1 \\ V_{4,j}^2 - 3,4V_{4,j}^1 & \text{für } V_{4,j}^1 \leq 1.030 \text{ und } V_{4,j}^2 > 3.4V_{4,j}^1. \end{cases}$$

Für das Bündel aus beiden Optionen ergibt sich somit aus Sicht des Vermieters  $U$  folgendes Auszahlungsprofil  $\bar{B}(P)$ :

$$\bar{B}(P) = \begin{cases} 1.030 - V_{4,j}^1 & \text{für } V_{4,j}^1 > 1.030 \\ 0 & \text{für } V_{4,j}^1 \leq 1.030 \text{ und } V_{4,j}^2 \leq 3,4V_{4,j}^1 \\ V_{4,j}^2 - 3,4V_{4,j}^1 & \text{für } V_{4,j}^1 \leq 1.030 \text{ und } V_{4,j}^2 > 3,4V_{4,j}^1. \end{cases}$$

Die Verteilung der 81 Endzustände nach vier Jahren kann aus der folgenden Abbildung 2.3 abgelesen werden (in T Euro). Die Zustände, in denen die Umnutzungsoption bei alleiniger Betrachtung ausgeübt wird, sind im kursiven Fettdruck aufgeführt. Zustände, in denen die Mietverlängerungsoption nicht ausgeübt wird, sind schwarz hinterlegt. Die Zustände, in denen die Umnutzungsoption ausgeübt wird, werden im kursiven Fettdruck aufgeführt und sind schwarz hinterlegt.<sup>52</sup>

<sup>52</sup>Die Varianz des Preisprozesses 1 steigt in jeder Periode um 0,01, diejenige des Preisprozesses 2 um 0,0625 und deren Kovarianz erhöht sich mit jedem Schritt um 0,0075. Wie man nachweisen kann, beträgt der Korrelationskoeffizient auch nach der vierten Periode 0,3. Somit ist die Bedingung der Verschiebungsinvarianz dieser Momente erfüllt.



	(Lager- halle)	(Büro- gebäude)	Martingal- wahrscheinlich- keiten im Endknoten		(Lager- halle)	(Büro- gebäude)	Martingal- wahrscheinlich- keiten im Endknoten
1	754,1	862	5,8287E-02	41	1.962,1	2.934	9,1701E-03
2	957,7	1.171	3,6709E-02	42	1.662,6	3.985	5,9028E-03
3	811,5	1.590	2,3630E-02	43	1.309,0	2.934	9,3726E-03
4	957,7	1.171	3,6709E-02	44	1.662,6	3.985	5,9028E-03
5	1.216,3	1.590	2,3119E-02	45	1.408,9	5.412	3,7997E-03
6	1.030,7	2.160	1,4882E-02	46	1.030,7	2.160	1,4882E-02
7	811,5	1.590	2,3630E-02	47	1.309,0	2.934	9,3726E-03
8	1.030,7	2.160	1,4882E-02	48	1.109,2	3.985	6,0332E-03
9	873,5	2.934	9,5796E-03	49	1.309,0	2.934	9,3726E-03
10	957,7	1.171	3,6709E-02	50	1.662,6	3.985	5,9028E-03
11	1.216,3	1.590	2,3119E-02	51	1.408,9	5.412	3,7997E-03
12	1.030,7	2.160	1,4882E-02	52	1.109,2	3.985	6,0332E-03
13	1.216,3	1.590	2,3119E-02	53	1.408,9	5.412	3,7997E-03
14	1.544,8	2.160	1,4560E-02	54	1.193,8	7.351	2,4459E-03
15	1.309,0	2.934	9,3726E-03	55	811,5	1.590	2,3630E-02
16	1.030,7	2.160	1,4882E-02	56	1.030,7	2.160	1,4882E-02
17	1.309,0	2.934	9,3726E-03	57	873,5	2.934	9,5796E-03
18	1.109,2	3.985	6,0332E-03	58	1.030,7	2.160	1,4882E-02
19	811,5	1.590	2,3630E-02	59	1.309,0	2.934	9,3726E-03
20	1.030,7	2.160	1,4882E-02	60	1.109,2	3.985	6,0332E-03
21	873,5	2.934	9,5796E-03	61	873,5	2.934	9,5796E-03
22	1.030,7	2.160	1,4882E-02	62	1.109,2	3.985	6,0332E-03
23	1.309,0	2.934	9,3726E-03	63	939,9	5.412	3,8836E-03
24	1.109,2	3.985	6,0332E-03	64	1.030,7	2.160	1,4882E-02
25	873,5	2.934	9,5796E-03	65	1.309,0	2.934	9,3726E-03
26	1.109,2	3.985	6,0332E-03	66	1.109,2	3.985	6,0332E-03
27	939,9	5.412	3,8836E-03	67	1.309,0	2.934	9,3726E-03
28	957,7	1.171	3,6709E-02	68	1.662,6	3.985	5,9028E-03
29	1.216,3	1.590	2,3119E-02	69	1.408,9	5.412	3,7997E-03
30	1.030,7	2.160	1,4882E-02	70	1.109,2	3.985	6,0332E-03
31	1.216,3	1.590	2,3119E-02	71	1.408,9	5.412	3,7997E-03
32	1.544,8	2.160	1,4560E-02	72	1.193,8	7.351	2,4459E-03
33	1.309,0	2.934	9,3726E-03	73	873,5	2.934	9,5796E-03
34	1.030,7	2.160	1,4882E-02	74	1.109,2	3.985	6,0332E-03
35	1.309,0	2.934	9,3726E-03	75	939,9	5.412	3,8836E-03
36	1.109,2	3.985	6,0332E-03	76	1.109,2	3.985	6,0332E-03
37	1.216,3	1.590	2,3119E-02	77	1.408,9	5.412	3,7997E-03
38	1.544,8	2.160	1,4560E-02	78	1.193,8	7.351	2,4459E-03
39	1.309,0	2.934	9,3726E-03	79	939,9	5.412	3,8836E-03
40	1.544,8	2.160	1,4560E-02	80	1.193,8	7.351	2,4459E-03
				81	1.011,6	9.985	1,5744E-03

Abbildung 2.3: Verteilung der beiden Preisprozesse nach dem allgemeinen Verfahren

Der Wert der Optionen kann, wie oben beschrieben, durch einfache Erwartungswertbildung bestimmt werden. Der Wert der Umnutzungsoption, unter Berücksichtigung der Mietverlängerungsoption, berechnet sich dann zu 38,12 T Euro. Ohne Berücksichtigung der Mietverlängerungsoption würde sich ein höherer Wert der Umnutzungsoption von 90,83 T Euro ergeben. Der gesuchte Wert für das Bündel aus beiden Realoptionen beträgt -69,84 T Euro. Der Wertbeitrag der Mietverlängerungsoption alleine beträgt -107,96 T Euro.

## 2.6 Spezielle Problemstellung bei einer Vielzahl von Preisprozessen

Bislang wurde ein didaktisch leicht zugängliches Verfahren vorgestellt, das analog zum Modell von *Cox/Ross/Rubinstein* ein vollständiges und arbitragefreies Preissystem für mehr als zwei Preisprozesse gewährleistet. Die Vorgehensweise war bisher der Gestalt, dass durch geschicktes Vorgehen aus den verschiedenen Lösungen des Gleichungssystems (2.4.3)-(2.4.7) eine Lösung ausgewählt wurde. Dazu wurden Parameter ex ante vorgegeben und dann eine bestimmte Lösung ermittelt.

Im Folgenden ist es nun das Ziel eine eindeutige oder besser wenigdeutige Lösung für das Gleichungssystem zu suchen. Vorteilhaft wäre dazu eine Linearisierung des Lösungsweges anzustreben. Statt der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (2.4.3)-(2.4.7) wird dieselbe Lösung über das Lösen eines linearen Systems erzielt, das grundsätzlich, wenn es weder über- noch unterbestimmt ist, eine eindeutige Lösung hat.<sup>53</sup> Dies ermöglicht darüberhinaus einen flexiblen Einsatz des Verfahrens auf verschiedenste Probleme gleicher Dimension.

## 2.7 Vereinfachte Grundprozesse für $n$ Preisprozesse

Ausgangspunkt der Überlegungen stellen vereinfachte Grundprozesse dar. Diese  $n$  Prozesse sind voneinander linear unabhängig, die jeweiligen Erwartungswerte der Randverteilungen betragen 0 und die zugehörigen Standardabweichungen pro Zeitschritt sind 1. Durch geeignete Transformationen, wie die Multiplikation mit einer Konstanten, werden diese vereinfachten Grundprozesse dazu benutzt Prozesse abzuleiten, die die gewünschten Eigenschaften bzgl. Erwartungswert, Varianz und Kovarianz aufweisen. Um die vereinfachten Grundprozesse aufzustellen, müssen allgemein  $n$  Vektoren  $z^i \in \mathbb{R}^{m+1}$  bestimmt werden, die diese drei Bedingungen erfüllen.

1. Erwartungswert von 0:

$$(z^i)^T p = 0 \quad \forall i.$$

---

<sup>53</sup>Vgl. z.B. **Kowalsky/Michler** (1998), S. 90 ff.

## 2. Varianz von 1:

$$(z^i \circ z^i)^T p = 1 \quad \forall i,$$

wobei  $\circ$  definiert ist als das komponentenweise Produkt der Vektoren  $z^i$  und  $z^i$

$$z^i \circ z^i = \begin{pmatrix} z^i(1) \\ z^i(2) \\ \vdots \\ z^i(m) \\ z^i(m+1) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} z^i(1) \\ z^i(2) \\ \vdots \\ z^i(m) \\ z^i(m+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^i(1)z^i(1) \\ z^i(2)z^i(2) \\ \vdots \\ z^i(m)z^i(m) \\ z^i(m+1)z^i(m+1) \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$z^i \circ z^i = z^i J z^i = (z^i)^T z^i$$

mit  $J \in \mathbb{R}^{m+1 \times m+1}$  als der Identitätsabbildung.

## 3. Unabhängigkeit:

$$(z^i \circ z^k)^T p = 0 \quad \forall i \neq k.$$

Der Vektor  $p$  stellt wieder den Vektor der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines bestimmten Zustandes dar. Dieser wird wie beim Verfahren in Abschnitt 2.4.2 ex ante festgelegt. Im Folgenden wird ebenfalls von einer Gleichverteilung ausgegangen, d.h.

$$p_1 = p_2 = p_3 \dots = p_{m+1}.$$

Diese Vorabfestlegungen stellen, wie die freie Wahl der unabhängigen Vektoren aus mehreren Möglichkeiten, die angestrebte Einschränkung des Lösungsraumes für die später zu bestimmenden Parameter dar. Je nachdem wie diese Wahl erfolgt, kann der Algorithmus mit besseren oder schlechteren numerischen Eigenschaften aufwarten.<sup>54</sup> Für das Beispiel eines trinomialen Baumes können die beiden Vektoren zu

$$z^1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad z^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

gewählt werden. Einfaches Einsetzen zeigt, dass die Vektoren die gewünschten Bedingungen erfüllen.

<sup>54</sup> Dieses Problem wird an dieser Stelle nicht weiter verfolgt und bleibt weiteren Studien vorbehalten.

1. Erwartungswert von 0:

$$-\frac{\sqrt{6}}{2} \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{1}{3} = 0 \text{ und } 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{3} - \sqrt{2} \frac{1}{3} = 0.$$

2. Varianz von 1:

$$\frac{6}{4} \frac{1}{3} + \frac{6}{4} \frac{1}{3} = 1 \text{ und } 2 \frac{2}{4} \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{3} = 1.$$

3. Unabhängigkeit:

$$-\frac{\sqrt{6}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{3} = 0.$$

Somit erfüllen die beiden Vektoren die gewünschten Kriterien und können für jedes Problem gleicher Dimension eingesetzt werden. Ziel war, dass die eingesetzten Vektoren, wie im obigen Modell, nun in Erwartungswerten, Varianzen und Kovarianzen den gewünschten entsprechen. Dazu müssen die vereinfachten Grundprozesse angepasst werden. Vor der Anpassung der Varianzen und Kovarianzen wird zuerst die einfache Anpassung der Erwartungswerte durchgeführt.

## 2.8 Kalibrierung auf gewünschte Prozessparameter

### 2.8.1 Erwartungswerte

Zur Anpassung der Erwartungswerte wird zu jedem Term eine für jeden Preisprozess unterschiedliche Konstante, ein Skalar, addiert. Dies ergibt

$$\begin{aligned} z^1 + E^1 1 \\ z^2 + E^2 1 \\ \vdots \\ z^{n-1} + E^{n-1} 1 \\ z^n + E^n 1, \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

wobei  $1 \in \mathbb{R}^{m+1}$  den Einsvektor darstellt. Diese Addition lässt dabei Varianzen und Kovarianzen unverändert.<sup>55</sup> Im Beispiel sind  $E^1 = 5\%$  und

<sup>55</sup>Vgl. etwa zu Varianzen Bosch (1992), S. 30 ff. und zu Kovarianzen Bosch (1992), S. 52 ff.

$$E^2 = 10\%.$$

## 2.8.2 Varianzen

Die Anpassung der Varianzen erfolgt durch Multiplikation des Zufallszahlenvektors mit Konstanten, ebenfalls Skalare,  $a^{ii} = \sqrt{\text{var}^i}$ . Dies ergibt

$$\begin{pmatrix} a^{11}z^1 + E^1 1 \\ a^{22}z^2 + E^2 1 \\ \vdots \\ a^{n-1,n-1}z^{n-1} + E^{n-1} 1 \\ a^{nn}z^n + E^n 1. \end{pmatrix} \quad (2.8.2)$$

Der Erwartungswert bleibt durch diese Transformation unverändert, da mit  $(z^i)^T p = 0$

$$(a^{ii}z^i + E^i 1)^T p = a^{ii}(z^i)^T p + E^i = E^i$$

gilt.

## 2.8.3 Matrizenzerlegung der Varianz-Kovarianz-Matrix

Zur Ableitung der Kovarianz kann die Varianz-Kovarianz-Matrix  $COV \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in zwei Matrizen gemäß folgender Matrixengleichung zerlegt werden:<sup>56</sup>

$$COV = AA^T, \quad (2.8.3)$$

wobei

$$COV = \begin{pmatrix} \text{var}^1 & \text{cov}^{12} & \dots & \text{cov}^{1n-1} & \text{cov}^{1n} \\ \text{cov}^{12} & \text{var}^2 & \dots & \text{cov}^{2n-1} & \text{cov}^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}^{1n-1} & \text{cov}^{2n-1} & \dots & \text{var}^{n-1} & \text{cov}^{n-1n} \\ \text{cov}^{1n} & \text{cov}^{2n} & \dots & \text{cov}^{n-1n} & \text{var}^n \end{pmatrix}$$

gilt. Die so ermittelte Matrix  $A$  lässt sich dann einsetzen, um abhängige stochastische Prozesse zu erzeugen.

<sup>56</sup>Vgl. in analoger Weise bei Simulationen Cheng (1998), S. 166 ff. In Abschnitt 2.9.1 wird die genaue Methodik der Zerlegung näher erläutert.

## 2.8.4 Kovarianzen und Gesamtschau

Die gewünschte Kovarianz kann durch gewichtete Addition der verschiedenen Zufallszahlenvektoren  $z^i$  erreicht werden:

$$\langle x^i \rangle = \langle z^i \rangle A^T + \langle E^i \rangle^T 1, \quad (2.8.4)$$

wobei  $\langle \rangle$  für eine Matrix bestehend aus den Zufallszahlenvektoren  $x^i$  oder  $z^i$  mit

$$\langle x^i \rangle = \bigoplus_{i=1}^n x^i$$

und

$$\langle z^i \rangle = \bigoplus_{i=1}^n z^i$$

stehen. Dabei können  $\langle x^i \rangle$  und  $\langle z^i \rangle$  auch in der Form

$$\langle x^i \rangle = (x^1, x^2 \dots x^{n-1}, x^n)$$

und

$$\langle z^i \rangle = (z^1, z^2 \dots z^{n-1}, z^n)$$

geschrieben werden.  $x^i$  stellt den Prozess der stetigen Rendite des  $i$ -ten Vermögenswertes dar. Weiterhin gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \dots & a^{1n-1} & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \dots & a^{2n-1} & a^{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a^{n-11} & a^{n-12} & \dots & a^{n-1n-1} & a^{n-1n} \\ a^{n1} & a^{n2} & \dots & a^{nn-1} & a^{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Wählt man dabei  $A$  wie in den Gleichungen (2.4.3)-(2.4.7) erhält man Zufallszahlenvektoren mit den gewünschten Eigenschaften. Dies kann durch gliedweise Multiplikation nachgewiesen werden:

1. Erwartungswert:

$$E(\langle x^i \rangle) = (\langle z^i \rangle A^T)^T p + \langle E^i \rangle^T 1 p = \begin{pmatrix} a^{11}(z^1)^T p + a^{12}(z^2)^T p + \dots + a^{1n-1}(z^{n-1})^T p + a^{1n}(z^n)^T p \\ a^{21}(z^1)^T p + a^{22}(z^2)^T p + \dots + a^{2n-1}(z^{n-1})^T p + a^{2n}(z^n)^T p \\ \vdots \\ a^{n-11}(z^1)^T p + a^{n-12}(z^2)^T p + \dots + a^{n-1n-1}(z^{n-1})^T p + a^{n-1n}(z^n)^T p \\ a^{n1}(z^1)^T p + a^{n2}(z^2)^T p + \dots + a^{nn-1}(z^{n-1})^T p + a^{nn}(z^n)^T p \end{pmatrix}$$

$$+\langle E^i \rangle = \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ \vdots \\ E^{n-1} \\ E^n \end{pmatrix}.$$

2. Varianz:

$$\begin{aligned} \text{var}(\langle x^i \rangle) &= ((\langle z^i \rangle A^T)^T (\langle z^i \rangle A^T))^T p = \\ &= \left( \begin{pmatrix} a^{11} z^1 + a^{12} z^2 + \dots + a^{1n-1} z^{n-1} + a^{1n} z^n \\ a^{21} z^1 + a^{22} z^2 + \dots + a^{2n-1} z^{n-1} + a^{2n} z^n \\ \vdots \\ a^{n-11} z^1 + a^{n-12} z^2 + \dots + a^{n-1n-1} z^{n-1} + a^{n-1n} z^n \\ a^{n1} z^1 + a^{n2} z^2 + \dots + a^{nn-1} z^{n-1} + a^{nn} z^n \end{pmatrix}^T \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} a^{11} z^1 + a^{12} z^2 + \dots + a^{1n-1} z^{n-1} + a^{1n} z^n \\ a^{21} z^1 + a^{22} z^2 + \dots + a^{2n-1} z^{n-1} + a^{2n} z^n \\ \vdots \\ a^{n-11} z^1 + a^{n-12} z^2 + \dots + a^{n-1n-1} z^{n-1} + a^{n-1n} z^n \\ a^{n1} z^1 + a^{n2} z^2 + \dots + a^{nn-1} z^{n-1} + a^{nn} z^n \end{pmatrix} \right)^T p = \\ &= \begin{pmatrix} ((a^{11})^2 z^1 \circ z^1)^T p + ((a^{12})^2 z^2 \circ z^2)^T p + \dots \\ ((a^{21})^2 z^1 \circ z^1)^T p + ((a^{22})^2 z^2 \circ z^2)^T p + \dots \\ \vdots \\ ((a^{n-11})^2 z^1 \circ z^1)^T p + ((a^{n-12})^2 z^2 \circ z^2)^T p + \dots \\ ((a^{n1})^2 z^1 \circ z^1)^T p + ((a^{n2})^2 z^2 \circ z^2)^T p + \dots \\ + ((a^{1n-1})^2 z^{n-1} \circ z^{n-1})^T p + ((a^{1n})^2 z^n \circ z^n)^T p \\ + ((a^{2n-1})^2 z^{n-1} \circ z^{n-1})^T p + ((a^{2n})^2 z^n \circ z^n)^T p \\ \vdots \\ + ((a^{n-1n-1})^2 z^{n-1} \circ z^{n-1})^T p + ((a^{n-1n})^2 z^n \circ z^n)^T p \\ + ((a^{nn-1})^2 z^{n-1} \circ z^{n-1})^T p + ((a^{nn})^2 z^n \circ z^n)^T p \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \text{var}^1 \\ \text{var}^2 \\ \vdots \\ \text{var}^{n-1} \\ \text{var}^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Tatsache benutzt, dass dies dem Produkt zweier gleicher Zeilen aus Matrix  $A$  und damit dem Koeffizienten aus der Diagonale von  $COV$  entspricht.<sup>57</sup>

### 3. Kovarianz:

Für die Kovarianzen wird nur der erste Zyklus der Permutation<sup>58</sup> der Preisprozesse  $x^t$

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ x^2 & x^3 & \dots & x^n & x^1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Kovarianzen von  $i, i+2, i, i+3$  etc. ermitteln sich analog:

$$\begin{aligned} cov((x^i, x^{i+1})) &= ((\langle z^i \rangle A^T)^T (\langle z^k \rangle A^T))^T p = \\ &= \begin{pmatrix} a^{11}a^{21}(z^1 \circ z^1)^T p + a^{12}a^{22}(z^2 \circ z^2)^T p + \dots \\ a^{21}a^{31}(z^1 \circ z^1)^T p + a^{22}a^{32}(z^2 \circ z^2)^T p + \dots \\ \vdots \\ a^{n-11}a^{n1}(z^1 \circ z^1)^T p + a^{n-12}a^{n2}(z^2 \circ z^2)^T p + \dots \\ a^{n1}a^{11}(z^1 \circ z^1)^T p + a^{n2}a^{12}(z^2 \circ z^2)^T p + \dots \\ + a^{1n-1}a^{2n-1}(z^{n-1} \circ z^{n-1})^T p + a^{1n}a^{2n}(z^n \circ z^n)^T p \\ + a^{2n-1}a^{3n-1}(z^{n-1} \circ z^{n-1})^T p + a^{2n}a^{3n}(z^n \circ z^n)^T p \\ \vdots \\ + a^{n-1n-1}a^{nn-1}(z^{n-1} \circ z^{n-1})^T p + a^{n-1n}a^{nn}(z^n \circ z^n)^T p \\ + a^{nn-1}a^{1n-1}(z^{n-1} \circ z^{n-1})^T p + a^{nn}a^{1n}(z^n \circ z^n)^T p \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} cov^{12} \\ cov^{23} \\ \vdots \\ cov^{n-1n} \\ cov^{n1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Tatsache benutzt, dass dies dem Produkt zweier benachbarter Zeilen der Matrix  $A$  und damit wiederum den entsprechenden Koeffizienten aus  $COV$  entspricht.

Damit lassen sich mit diesem Verfahren geeignete Prozesse mit den gewünschten Eigenschaften aufbauen. Der nächste Punkt betrifft nun die Suche nach einer geeigneten Matrix.

<sup>57</sup> Weiterhin wurde die Unabhängigkeit der Vektoren  $z^i$  voneinander verwendet.

<sup>58</sup> Zur Zykelschreibweise vgl. etwa **Herstein** (1978), S. 79.



## 2.9 Bestimmung der Matrizeneinträge

### 2.9.1 Cholesky-Zerlegung

Eine geeignete Matrix  $A$  zu finden, ist äquivalent dazu eine Zerlegung der Matrix  $COV$  zu finden, die die Gleichung (2.8.3) erfüllt.

Für Zerlegungen existieren verschiedene Möglichkeiten.<sup>59</sup> Unter diesen Gegebenheiten kann die Cholesky-Zerlegung angewendet werden. Denn der zugehörige Satz von *Cholesky* besagt:<sup>60</sup>

**Theorem 2.9.1.1.** *Für eine symmetrische und positiv definite Matrix  $COV$  mit Werten aus  $\mathbb{R}^{n \times n}$  existiert eine eindeutige Dreieckszerlegung*

$$COV = AA^T$$

mit  $A$  einer eindeutig bestimmten regulären unteren Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a^{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^{21} & a^{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a^{n-11} & a^{n-12} & a^{n-13} & \dots & a^{n-1n-1} & 0 \\ a^{n1} & a^{n2} & a^{n3} & \dots & a^{nn-1} & a^{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2.9.1)$$

Um den Satz anzuwenden müssen die zwei Voraussetzungen erfüllt sein:

1.  $COV$  ist als Varianz-Kovarianz-Matrix per Definitionem symmetrisch.
2.  $COV$  ist per Definitionem positiv semidefinit, da für Varianz-Kovarianz-Matrizen stets gilt.<sup>61</sup>

$$\chi^T COV \chi \geq 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist leicht ersichtlich. Sieht man  $\chi$  als Portfoliogewichte an, entspricht  $\chi^T COV \chi$  der Portfoliovarianz, die minimal auf null abgesenkt werden kann.

Existiert zudem kein risikoloses Portfolio und keine Arbitragemöglichkeit in einem mit risikolosen Vermögenswert vollständigen Preissystem, also nicht die Möglichkeit ein risikoloses Portfolio aus den riskanten Positionen nachzubilden, kann sogar gefolgert werden, dass die Matrix  $COV$  positiv definit ist, d.h.<sup>62</sup> und

$$\chi^T COV \chi > 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^n \text{ und } \chi \neq 0$$

<sup>59</sup>Vgl. etwa Niemeyer/Wermuth (1987), S. 69 oder S. 331.

<sup>60</sup>Vgl. z.B. Hämmerlein/Hofmann (1988), S. 66 f.

<sup>61</sup>Vgl. Campell/Lo/MacKinley (1997), S. 184 f.

<sup>62</sup>Vgl. Campell/Lo/MacKinley (1997), S. 185 f.

gilt. Um dies zu erreichen, wird zur Berechnung der Matrix  $A$  zunächst auf den risikolosen Vermögenswert verzichtet. Dies ist ohne weitere Konsequenzen möglich, da die Varianz des risikolosen Vermögenswerts und die Kovarianzen mit dem risikolosen Vermögenswert Null betragen, und somit keinen Einfluss auf die Zerlegung haben.

Damit ist der Satz von *Cholesky* anwendbar und es existiert eine eindeutige Zerlegung.

Die Cholesky-Zerlegung hat für  $2 \leq n$  folgenden Algorithmus, wobei mit  $var^{j[0]}$  und  $cov^{ij[0]}$  die Einträge der Varianz-Kovarianz-Matrix gemeint sind.<sup>63</sup>

1. Schritt der  $[h]$ -ten Wiederholung, angefangen mit der 0-ten Wiederholung

$$a^{jj} = \sqrt{var^{j[h]}} \text{ mit } j = h + 1.$$

2. Schritt der  $[h]$ -ten Wiederholung

$$a^{ij} = \frac{cov^{ij[h]}}{a^{jj}} \quad \forall h + 1 < i \leq n \text{ und } j = h + 1.$$

3. Schritt der  $[h]$ -ten Wiederholung

$$var^{j[h+1]} = var^{j[h]} - a^{ji} a^{ji} \text{ für } i = h + 1 \text{ und } h + 1 < j \leq n.$$

4. Schritt der  $[h]$ -ten Wiederholung

$$cov^{ij[h+1]} = cov^{ij[h]} - a^{ih+1} a^{jh+1}$$

$$\forall h + 1 < i \leq n \text{ und } h + 2 < j \leq n \text{ und } j \neq i$$

oder

$$\forall h + 2 < i \leq n \text{ und } h + 1 < j \leq n \text{ und } j \neq i$$

Nach  $n - 1$ -maliger Wiederholung erhält man das Ergebnis der Gleichung (2.9.1).

---

<sup>63</sup>Vgl. etwa **Niemeyer/Wermuth** (1987), S. 144 f.

### 2.9.2 Umsetzungen im Vergleich

Für den zweidimensionalen Fall  $COV \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  war die Coleksy-Zerlegung von

$$COV = \begin{pmatrix} var^1 & cov^{12} \\ cov^{12} & var^2 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen als

$$A = \begin{pmatrix} a^{11} & 0 \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten  $a$  ergeben sich zu

$$a^{11} = \sqrt{var^1},$$

$$a^{21} = \frac{cov^{12}}{\sqrt{var^1}},$$

und

$$a^{22} = \sqrt{var^2 - \frac{(cov^{12})^2}{var^1}}.$$

Obige Werte eingesetzt, ergibt folgende Ergebnisse, die der Tabelle 2.6 entnommen werden können.

Variable	Wert
$a^{11}$	0,1
$a^{21}$	0,075
$a^{22}$	0,2385

Tabelle 2.6: Variablen der Preisprozesse für die Fallstudie nach dem erweiterten Verfahren

Mit diesen Ergebnissen lässt sich nun der Prozess aufbauen. Dazu werden die Werte in die Gleichung (2.8.4) eingesetzt. Für den zweidimensionalen Fall bedeutet dies:

$$(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} Z^1(1) & Z^2(1) \\ Z^1(2) & Z^2(2) \\ Z^1(3) & Z^2(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{11} & a^{21} \\ 0 & a^{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E^1 & E^2 \\ E^1 & E^2 \\ E^1 & E^2 \end{pmatrix}.$$

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$x^1(j)$	-0,07247	0,05000	0,17247
$x^2(j)$	0,1769	-0,2373	0,3605
$p_j$	0,3333	0,3333	0,3333

Tabelle 2.7: Zustandsvariablen der Preisprozesse und Wahrscheinlichkeiten für die Fallstudie nach dem erweiterten Verfahren

Dies ergibt folgende aus der Tabelle 2.7 entnehmbare Werte.

Man erkennt Veränderungen gegenüber der Darstellung in Abschnitt 2.5. Diese resultieren aus den anders genutzten Freiheitsgraden bei der Kalibrierung und verschwinden bei hinreichender Anzahl von Zeitschritten.<sup>64</sup> Nach der Berechnung der Martingalwahrscheinlichkeiten ergibt sich der Wert der verkauften Verlängerungsoption zu -95,87 T Euro. Der Wert der Ummutzungsoption beträgt 47,07 T Euro. Nachfolgende Tabelle 2.8 gibt eine Übersicht:

	Wert (Euro)	% von 936,5 Euro
Ummutzungsoption mit Verlängerungsoption	100,71	10,8%
Ummutzungsoption ohne Verlängerungsoption	47,07	5,0%
Verlängerungsoption	-95,87	-10,2%
Ummutzungsoption und Verlängerungsoption	-48,80	-5,2%

Tabelle 2.8: Realloptionspreise für die Fallstudie nach dem erweiterten Verfahren

Das Realloptionsbeispiel mit drei Preisprozessen stellt aber nicht den eigentlichen Fall dar, für das das Verfahren konzipiert wurde. Die Vorteile zeigen sich erst, wenn die Zahl der Preisprozesse genügend groß ist. Das soll an einen Anwendungsbeispiel demonstriert werden.

<sup>64</sup> Um dies näher zu untersuchen, wurden Simulationstudien durchgeführt. Eine genaue Beschreibung würde aber an dieser Stelle zu weit führen, da das Hauptaugenmerk auf der Verfahrensidee, nicht der Umsetzung liegt.

## 2.10 Empirischer Anwendungsfall - Finanzinnovationen

### 2.10.1 Problemstellung Aktienanleihekonstruktion

Bewertet wird ein sogenannter Blue Yield Bond mit folgenden Daten:<sup>65</sup>

WPK:	587766	
Fälligkeit:	28.06.2010	(damit Laufzeit: 8 Jahre)
Emittent:	Bayerische Landesbank	
Rückzahlung:	100%	(Nominal 1000 Euro)
Basiswert:	Aktienkorb aus 15 internationalen Blue Chips	
Basispreis:	60% der Schlusskurse der Aktien des Korbes am 28.06.2002 in lokaler Währung	
Zinszahlung:	11%, wenn keine der 15 Aktien im vorherigen Jahr unter ihren Basispreis gefallen ist	(jährlich nachschüssig)
	5%, wenn eine der 15 Aktien im vorherigen Jahr unter ihren Basispreis gefallen ist	(jährlich nachschüssig)
	1%, wenn mehr als eine der 15 Aktien im vorherigen Jahr unter ihren Basispreis gefallen ist	(jährlich nachschüssig)

Tabelle 2.9: *Daten des Blue Yield Bonds*

Der Aktienkorb enthält dabei folgende Papiere:

<sup>65</sup> Vgl. Brechmann et al. (2002), S. 81.

AXA	BMW	Bridgestone	Canon	Coca-Cola
Citigroup	Dell	Deutsche Bank	Honda	L.V.M.H.
Microsoft	Pepsi	Pfizer	Siemens	Sony

Tabelle 2.10: Korb der Basiswerte des Blue Yield Bonds

Für die Lösung muss zunächst ein Baum mit 16 Preisprozessen aufgestellt werden, wobei der 16. Prozess der deterministische ist.

## 2.10.2 Vereinfachte Grundprozesse

Der Prozess der Zufallsvektoren ist analog zu oben nach dem Schema

$$\langle x^i \rangle = \langle z^i \rangle A^T + E^i 1 \quad (2.10.1)$$

aufgebaut, wobei für die Vektoren  $x^i \in \mathbb{R}^{16}$ ,  $z^i \in \mathbb{R}^{16}$  und  $A \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$  gilt. Erstere stellen die Renditeausprägungen der 15 Aktien dar, in der Reihenfolge, wie sie in Tabelle 2.10 beschrieben sind; der 16. Prozess, der des risikolosen Vermögenswertes, wird erst nach der Matrizenzerlegung hinzugenommen.<sup>66</sup> Der risikolose Vermögenswert wurde bewusst mit einem konstanten Zins versehen, da die Modellierung der Zinsentwicklung zwar nur eines zusätzlichen Prozesses oder mehrerer zusätzlicher Prozesse bedurft hätte.<sup>67</sup> Der eigentliche Erklärungsgehalt des Modells, die Mehrprozessproblematik, wäre nach einer zusätzlichen Beschreibung der möglichen Zinsprozesse untergegangen. Ohne Probleme wäre eine solche Zinsentwicklung aber mit einbeziehbar.

Für die unabhängigen Vektoren  $z^i$  wurde eine Matrix aufgestellt. Sie befindet sich im Anhang A.3.

## 2.10.3 Datenbasis

Als Schätzer für den Erwartungswertvektor wurde der Mittelwert der stetigen Rendite für 250 Börsentage (Zeitreihe von 28.06.2001 bis zum 28.06.2002) herangezogen. Unabhängig von zahlreichen Problemen die bei der Berechnung des Erwartungswerts auftreten können, wie z.B. Clustering, sollte

<sup>66</sup>Man beachte die Voraussetzungen an die Cholesky-Zerlegung in Abschnitt 2.9.1.

<sup>67</sup>Eine Möglichkeit stellt etwa ein diskretisiertes Heath/Jarrow/Morton-Modell dar. Vgl. Heath et al. (1990), S. 422 ff. oder auch im deutschsprachigen Raum Sandmann (2001), S. 321 ff. für weitere Varianten.

dies ausreichen.<sup>68</sup> Die Varianz-Kovarianz-Matrix wurde ebenso aus der 250 Tage Renditezeitreihe von 28.06.2001 bis zum 28.06.2002 geschätzt.<sup>69</sup> Datenquelle war Yahoo-Finance. Für die diversen Werte wurde immer der Kurs an der Heimatbörse herangezogen.<sup>70</sup> Nur für die japanischen Werte war der Kurs am Frankfurter Markt Grundlage, da keine Zeitreihe für die japanische Börse zugänglich war. Am Frankfurter Markt werden dabei diese Aktien in ausreichendem Volumen gehandelt, so dass die Renditeangaben verwendet werden können.<sup>71</sup> Um die täglichen Yen-Schwankungen miteinzubeziehen, wurden die so bestimmten Kurse in Yen umgerechnet.<sup>72</sup> Als risikoloser Zins wurde der Zins achtjähriger Kuponanleihen bei einer unterstellten flachen Zinsstruktur verwendet.<sup>73</sup>

#### 2.10.4 Zerlegung der Varianz-Kovarianz-Matrix

Ferner mussten die Preisprozesse so konstruiert werden, dass das Preissystem vollständig ist. Dazu wurde sichergestellt, dass mehrere Aktien des Basiswerts nicht ein Substitut für die anderen und damit ein Derivat darstellen. Dies hätte zur Konsequenz, dass eine Arbitragemöglichkeit bestehen könnte und der Satz von *Cholesky* auf

$$COV \in Mat_{n,n}^{Sym}(\mathbb{R}) \text{ mit } n = 15$$

nicht anwendbar wäre.<sup>74</sup> Dazu wurden die Prozesse auf Multikollinearität getestet.<sup>75</sup> Dabei schließt ein solcher Test auch statistische Abhängigkeiten ein.<sup>76</sup> Der Test ergab keine Multikollinearität.

Weiterhin musste ausgeschlossen werden, dass der Markt Arbitragemöglichkeiten bzgl. der nicht in *COV* enthaltenen risikolosen Anlagenmöglichkeit beinhaltet. Dazu mussten insbesondere die risikobehafteten Aktien Renditen über und unter dem risikolosen Zins erwirtschaften. Auch dies wurde

<sup>68</sup> Zu den Effekten vgl. etwa **Steiner/Bruns** (2002), S. 377.

<sup>69</sup> Ebenso hätten zur Kalibrierung marktliche Kenngrößen dienen können, wie die implizite Volatilität. Vgl. **Brunner/Hafner** (2003), S. 82 ff. Allerdings muss die Korrelation oder Kovarianz aufgrund der nur wenig vorhandenen Optionen auf Korrelationsprodukte weiterhin historisch berechnet werden. Vgl. **Brunner** (2004), S. 190.

<sup>70</sup> Für deutsche Werte wurde der umsatzstärkere Xetra-Kurs verwendet. Bei amerikanischen Werten wurde der NYSE-Kurs herangezogen; für Dell und Microsoft der NASDAQ-Kurs.

<sup>71</sup> Mindestens 5.000 Stück pro Tag wurden gehandelt.

<sup>72</sup> Außerdem wurden Bereinigungen für Dividenden und Kapitalmaßnahmen vorgenommen.

<sup>73</sup> Vgl. dazu auch Abschnitt 2.10.2.

<sup>74</sup> Vgl. Abschnitt 2.9.1 und insbesondere den Satz von *Cholesky* 2.9.1.1.

<sup>75</sup> Der Test findet sich bspw. bei **Griffiths et al.** Vgl. **Griffiths et al.** (1993), S. 435 ff.

<sup>76</sup> Zum Unterschied zwischen stochastischer und statistischer Abhängigkeit vgl. **Rinne** (2003), S. 86 und S. 180.

verifiziert.

Nun kann auf Basis von  $COV$  die gewünschte Matrix nach dem Algorithmus aus Abschnitt 2.9 bestimmt werden. Das Ergebnis kann dem Anhang A.2 entnommen werden. Somit ist nun der Renditegenerierungsprozess bestimmt worden.

### 2.10.5 Renditeprozesse

Zur Bewertung wurde ein Prozessbaum analog zu Abschnitt 2.9 aufgebaut. Um die Berechnung zu verkürzen, da der Schwerpunkt auf der Verfahrensdemonstration lag, wurde für jedes Börsenjahr ein Zeitschritt gewählt. Damit werden acht Zeitschritte für den Baum benötigt. Es wäre aber ein leichtes, mehr Zeitschritte mit in die Berechnung mit einzubeziehen. Nach der Berechnung mit acht Zeitschritten ergaben sich über  $10^9$  Endknoten. Hier ist der Baum für den ersten Zeitschritt dargestellt.

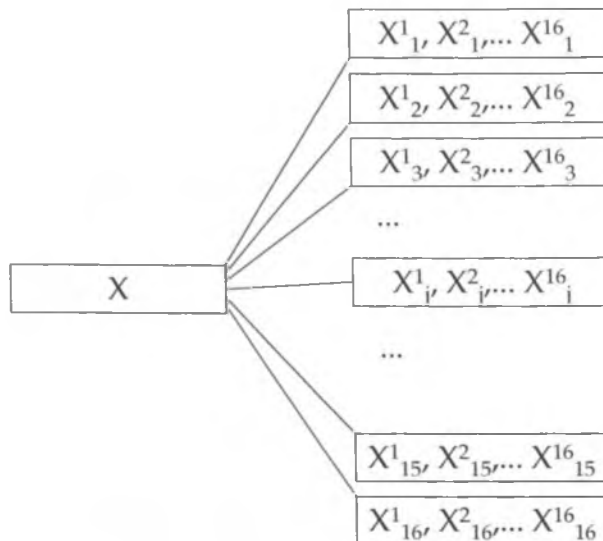


Abbildung 2.4: Aufbau des Problems mit 16 Preisprozessen nach dem erweiterten Verfahren

Die Berechnungen wurden in C++ durchgeführt.



## 2.10.6 Bewertung

Zur Bewertung des Blue Yield Bonds wurden wie in Abschnitt 2.4 auf Basis eines beliebigen (hier des ersten Zeitschrittes) unter Hinzunahme des risikolosen Vermögenswertes die Martingalwahrscheinlichkeiten bestimmt. Nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Martingalwahrscheinlichkeiten:

	Martingal- wahrscheinlichkeit
Zustand 1	0,06226
Zustand 2	0,08284
Zustand 3	0,07035
Zustand 4	0,08588
Zustand 5	0,06659
Zustand 6	0,05477
Zustand 7	0,07891
Zustand 8	0,05462
Zustand 9	0,03306
Zustand 10	0,04542
Zustand 11	0,06879
Zustand 12	0,07812
Zustand 13	0,05664
Zustand 14	0,05306
Zustand 15	0,07033
Zustand 16	0,03837

Tabelle 2.11: *Martingalwahrscheinlichkeiten beim Blue Yield Bond*

Der diskontierte Erwartungswert unter den Martingalwahrscheinlichkeiten über die Zahlungen aus dem Blue Yield Bond ergibt seinen Wert. Die Zahlungen aus dem Blue Yield Bond bestimmen sich in Abhängigkeit der Basispreise. Die Basispreise der Aktien sind 60% des Ausgangswertes vom 28.06.2002. Die Zinszahlung  $\bar{B}(t)$  des Blue Yield Bond zu einem beliebigen Zinszahlungszeitpunkt  $t$  kann dargestellt werden als:

$$\tilde{B}(t) = \begin{cases} 11\% & \text{für } \exp(X_j^i(t)) > 0,6 \quad \forall i < 16 \\ 5\% & \text{für } \exp(X_j^i(t)) > 0,6 \text{ für 14 Wertpapiere und} \\ & \exp(X_j^i(t)) < 0,6 \text{ für 1 Wertpapier} \\ 1\% & \text{für } \exp(X_j^i(t)) < 0,6 \text{ für 2 und mehr Wertpapiere.} \end{cases}$$

Bewertet man den Zahlungsstrom unter dem Martingalmaß aus Tabelle 2.11, ergibt sich für den Blue Yield Bond ein Preis von 93,52 %. Dieser liegt unter dem Ausgabebetrag von 100,5 %. Das Zustandekommen dieses Ergebnisses wird augenscheinlich, wenn man die Martingalwahrscheinlichkeiten für die drei Fälle nach einem Jahr betrachtet.

Zinszahlung 11%	Zinszahlung 5%	Zinszahlung 1%
Für alle Wertpapiere gilt: $\exp(X_j^i(t)) > 0,6$	Für 14 Wertpapiere gilt: $\exp(X_j^i(t)) > 0,6$ und zugleich gilt für ein Wertpapier: $\exp(X_j^i(t)) < 0,6$	Für mehr als 2 Wertpapiere gilt: $\exp(X_j^i(t)) < 0,6$
0,28042	0,3180235	0,38934

Tabelle 2.12: Martingalwahrscheinlichkeiten für die Zinszahlung nach dem ersten Jahr beim Blue Yield Bond

Tabelle 2.12 zeigt, dass die Martingalwahrscheinlichkeit, dass keine der 15 Wertpapiere unter ihren Basispreis fällt, mit 28% eher gering ist. Die größte Teil der Wahrscheinlichkeitsmasse liegt auf dem Fall, dass eine Zinszahlung von 1% geleistet wird.

Dieser starke Effekt würde sich kaum ändern, wenn zusätzlich ein Zinsmodell unterstellt würde. Um den Unterschied zum Emissionspreis zu erklären, müssten weitere vereinfachte Grundprozesse betrachtet werden. Erste Tests zeigten, dass der Unterschied nicht deutlich kleiner wird. Da das Ziel dieses Abschnitts die Entwicklung des Verfahrens war, wurden diese Tests nicht weiter verfolgt und bleiben weitere Studien vorbehalten. Damit kann man zwar nicht unterstellen, dass die These von der Fehlbepreisung dieser Produkte erhärtet wird. Einen Fingerzeig stellt dies aber dar.

## 2.11 Zusammenfassung

Hier wurde ein didaktisch leicht zugängliches Verfahren vorgestellt, das analog zum Modell von *Cox/Ross/Rubinstein* ein vollständiges und arbitragefreies Preissystem für mehr als zwei Preisprozesse gewährleistet. Die direkte Anwendung von Standardverfahren, wie des Binomialmodells, führt nur in Ausnahmefällen zu einem richtigen Ergebnis.

Zur Kalibrierung wurde ein allgemeines Verfahren vorgeschlagen, die Modellparameter an die gewünschten Parameter anzupassen. Die Bewertung von Optionen kann dann mit Hilfe der Martingalwahrscheinlichkeiten vorgenommen werden. Mit diesem Verfahren ist die Bewertung von Optionen auf mehrere Preisprozesse, Bündeln aus Optionen und Compound-Optionen möglich, da alle letztendlich auf ein identisches Kernproblem reduziert werden können.

Das Verfahren wurde am Beispiel von Realoptionen mit zwei zugrunde liegenden risikobehafteten Preisprozessen und einem risikolosen Preisprozess ausgeführt, kann jedoch problemlos auf höhere Dimensionen erweitert werden. Allerdings ergaben sich bei dieser Erweiterung Probleme im Zusammenhang mit der numerischen Bestimmung der Lösungen für die Gleichungen aus (2.4.3)-(2.4.7).

Deswegen wurde ein spezielles Verfahren für die Bewertung von Optionen auf eine Vielzahl von Preisprozessen vorgeschlagen. Ausgangspunkt dieses Verfahrens war die Möglichkeit die Varianz-Kovarianz-Matrix zu zerlegen. Diese so gewonnene Matrix wurde mit den Zustandsvariablen vereinfachter Grundprozesse multipliziert, die die Eigenschaften Erwartungswert von Null und Varianz von Eins haben. Weiterhin müssen die vereinfachten Grundprozesse unabhängig voneinander sein. Aus diesen Rechenoperationen ergaben sich Prozesse, die die gewünschten Eigenschaften bzgl. Erwartungswert, Varianz und Kovarianz aufweisen.

Für die Bestimmung der Zerlegung wurde die Cholesky-Zerlegung verwendet, die wie bei den hier gegebenen positiv definiten Matrizen anwendbar ist. Die Eignung des Verfahrens wurde einerseits an Hand des Realoptionsbeispiels erläutert.

Zur Demonstration der numerischen Leistungsfähigkeit wurde das Verfahren auf eine Finanzinnovation mit zahlreichen Preisprozessen, einen Blue Yield Bond, angewendet. Es zeigte sich, dass das Verfahren auch bei solchen Problemen ohne Schwierigkeiten angewendet werden kann. Dabei wurde eine erhebliche Differenz zwischen dem Ausgabekurs und dem Modellwert festgestellt.







## Kapitel 3

# Überabzählbare Zeit- und Zustandsmenge - Wiener-Prozess





### 3.1 Problemstellung

In den Jahren 1977 und 1979 publizierte *Robert Geske* ein Modell zur Bewertung von Compound-Optionen.<sup>1</sup> Compound-Optionen in diesem ursprünglichen Sinne sind Optionen auf Optionen auf einen Basiswert. Mit dem Bewertungsmodell kann nicht nur der von *Geske* beschriebene grundlegende Fall und die daraus resultierenden Anwendungsbeispiele bepreist werden. Vielmehr impliziert es einen grundlegenden Denkansatz zur Bewertung von einander abhängigen Ansprüchen. Daher gelang es diesen Ansatz immer wieder zur Bewertung neuer Probleme einzusetzen. So diente das Modell etwa als Grundlage zur Ableitung von Preisen für amerikanische Optionen.<sup>2</sup> Ferner wurde es verwendet, um den Wert von Fremd-<sup>3</sup> und Eigenkapitalansprüchen<sup>4</sup> an Unternehmen herzuleiten und darauf aufbauend den Volatility-Smile zu erklären<sup>5</sup>. Vor allem in letzter Zeit wurde der Ansatz auch im Bereich der Bewertung von Realoptionen eingesetzt.<sup>6</sup>

Der nun folgende Hauptabschnitt 3 bedient sich dieses Denkansatzes, um Bewertungsmodelle für zwei Basistypen von Optionen her- bzw. Querverbindungen zu bereits bestehenden Modellen abzuleiten: Barrier-Optionen und Optionen auf mehr als zwei riskante Vermögenswerte.<sup>7</sup>

Diese Erweiterung gelingt dadurch, dass statt des normalerweise verwendeten Differentialgleichungsansatzes zur Ableitung der Optionspreise der Martingalansatz eingesetzt wird. So leitet *Geske* selbst die Bewertungsformel mit Hilfe von Differentialgleichungen her.<sup>8</sup>

Die Möglichkeit der Herleitung mit Hilfe des Martingalansatzes deutet er nur an.<sup>9</sup> Beim Differentialgleichungsansatz ist die Grundstruktur bei jedem Bewertungsproblem durch die vorgegebenen Gleichungen für die Preisentwicklungen und die einfließenden Rand- bzw. Ausübungsbedingungen relativ starr, so dass Modifikationen und darauf aufbauende Umdeutungen

---

<sup>1</sup>Vgl. *Geske* (1979) und in einer ersten Anwendung, die allerdings vor dem eigentlichen Modell publiziert wurde, vgl. *Geske* (1977).

<sup>2</sup>Vgl. etwa *Roll* (1977), S. 257 f. für Kaufoptionen oder *Geske/Johnson* (1984), S. 1513 für Verkaufsoptionen.

<sup>3</sup>Vgl. z.B. *Fischer/Keber/Maringer* (2000), S. 131 ff. oder *Geske* (1977), S. 512.

<sup>4</sup>Vgl. z.B. *Ericsson/Reneby* (1998), S. 143 ff. oder *Fischer/Keber* (1999), S. 463 ff.

<sup>5</sup>Vgl. z.B. *Carr/Madan* (1998), S. 1 oder *Figlewski/Wang* (2000), S. 3.

<sup>6</sup>Vgl. etwa *Cortazar/Schwartz* (1993), S. 524 ff. oder *Schäfer/Schässburger* (2001), S. 95 ff.

<sup>7</sup>Vgl. zu Ersterem *Merton* (1973), S. 175 f. und zu Zweiterem *Stulz* (1982), S. 161 ff.

<sup>8</sup>Vgl. *Geske* (1979), S. 65 ff. Weiterhin verwendet er hier und in seinem Abschnitt von 1977 die präferenzfunktionsbasierte CPRA-Methode nach *Rubinstein*. Vgl. *Rubinstein* (1976), S. 412 ff.

<sup>9</sup>*Geske* selbst bezeichnet sein Vorgehen als risikoneutrale Bewertungsmethode. Vgl. *Geske* (1979), S. 70.

nur schwer möglich sind. Der Martingalansatz dagegen basiert hier auf den Parametern von Verteilungen und den Eintrittsbedingungen von Ereignissen, den Ausübungsbedingungen. Beide können relativ leicht umgedeutet werden, so dass die Übertragung auf weitere Optionstypen erleichtert wird. Im ersten Abschnitt wird das Compound-Option-Modell von *Geske* kurz vorgestellt. Die darauffolgende Herleitung gliedert sich in eine Überprüfung der Einsatzmöglichkeit des Martingalansatzes, das Auffinden eines Martingales und die Bewertung. Im letzten Abschnitt werden die zwei Erweiterungen vorgenommen, mit denen die Zusammenhänge zwischen Mehrprozess-Problemen und bedingten Optionsproblemen analysiert werden können.

### 3.2 Erweiterte Definition

Die Compound-Option im ursprünglichen Sinne von *Geske* ist eine europäische Kaufoption bei deren Ausübung man eine europäische Kaufoption erhält. *Geske* selbst versteht unter der 1. Option eine Aktienoption, bei deren Ausübung man eine 2. Option, die Aktie erhält, die wiederum eine Option auf das Vermögen der Aktiengesellschaft darstellt.<sup>10</sup> Zu bestimmen ist also der Wert einer 1. Option  $C_0$  auf eine 2. Option mit Wert  $S_0$  im Zeitpunkt  $t_0$ . Durch Ausüben der 1. Option kann zum Zeitpunkt  $t_1 = \tau_1 + t_0$  die 2. Option zum Preis  $B_1$  bezogen werden. Durch Ausüben der 2. Option kann der Basiswert  $V$ , ein risikobehafteter Vermögenswert, für den Kurs  $B_2$  zum Zeitpunkt  $t_2 = \tau_2 + t_0$  bezogen werden. Neben den üblichen Prämissen<sup>11</sup> in Rahmen eines Bewertungsmodells diesen Typs ist besonders die Voraussetzung, die an den stochastischen Prozess des Basiswerts gemacht wird, hervorzuheben. Der Basiswert hat zum Zeitpunkt  $t_k = \tau_k + t_0$  den Wert  $V_k$  und folgt einer geometrischen Brownschen Bewegung mit instantanen Erwartungswert  $\mu$  und instantaner Varianz  $\sigma^2$  und damit für einen Zeitraum  $\tau_k$   $\mu_k$  und  $\sigma_k^2$ . Abbildung 3.1 veranschaulicht den Sachverhalt.

<sup>10</sup>Vgl. *Geske* (1979), S. 65.

<sup>11</sup>Vgl. dazu etwa *Musiela/Rutkowski* (1997), S. 8 f. oder im Original *Geske* (1979), S. 65 f. So müssen auch Voraussetzungen an die zulässigen Handelsstrategien gemacht werden. Ohne diese ist eine Bewertung mit dem Martingalansatz möglich aber nicht sinnvoll. Vgl. *Musiela/Rutkowski* (1997), S. 233 f.

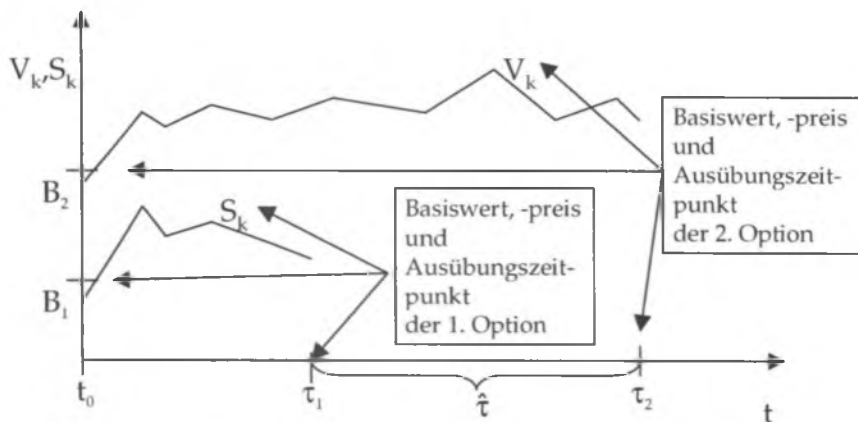


Abbildung 3.1: *Compound-Option nach Geske*

Damit folgt der Basiswert einem Prozess der Form

$$V_k = V_0 \exp(\mu_k + \sigma z_k) \quad (3.2.1)$$

mit

$$\tau_k \in [0, \infty),$$

wobei  $z_k$  einen Standard-Wiener-Prozess<sup>12</sup> darstellt. Die Zufallsvariable  $z_k$  ist damit normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\tau_k$ . Unter Berücksichtigung der Zufallsvariable der stetigen Renditen

$$x_k = \mu \tau_k + \sigma z_k \in NV(\mu \tau_k, \sigma_k)$$

vereinfacht sich diese Formel zu

$$V_k = V_{t_0} \exp(x_k). \quad (3.2.2)$$

Weiterhin beträgt der stetige Zins für risikolose Anlagen  $r$ . Es existiert damit ein risikoloser Vermögenswert und ein risikobehafteter Vermögenswert  $V_k$ .

<sup>12</sup>Vgl. z.B. **Bauer** (1991), S. 346 ff. Explizit soll erwähnt werden, dass hier ein Wiener-Prozess als Prozess mit f.s. stetigen Pfaden angesehen wird.

## 3.3 Bewertung von Compound-Optionen mit dem Martingalansatz

### 3.3.1 Prüfung der Anwendungsvoraussetzungen

Vor einer Herleitung muss zuerst geklärt werden, ob für die Bewertung der Compound-Option der Martingalansatz überhaupt angewendet werden kann, d.h. eine Äquivalenz zur Bewertung nach dem Paradigma Arbitragefreiheit besteht. Falls ja, kann das passende Martingalmaß und dann mit dessen Hilfe der Wert der Compound-Option bestimmt werden. Damit der Martingalansatz eingesetzt werden kann, muss folgende vereinfachte Bedingung für den beschriebenen Prozess des risikobehafteten Vermögenswertes für jeden Zeitraum  $\tau_k$  erfüllt sein:<sup>13</sup>

$$E \left( \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^{\tau_k} \frac{(\mu(x_t, t) - r(t))^2}{\sigma(t)^2} dt \right) \right) < \infty. \quad (3.3.1)$$

Im Falle der gewählten Prozesse bei der Compound-Option ist diese Bedingung aufgrund des konstanten instantanen Erwartungswerts und der konstanten instantanen Varianz für endliche Zeiträume  $\tau$  immer erfüllt. Der Martingalansatz ist also bei dieser Konstellation anwendbar. Nicht verwunderlich; diese Ausgangssituation entspricht der Situation bei *Black/Scholes* und *Merton*.

### 3.3.2 Ableitung des Martingalmaßes

Beim Martingalansatz muss aus der Martingalgleichung das Martingalmaß ermittelt werden.<sup>14</sup> Die Martingalgleichung besagt für jeden, insbesondere den risikobehafteten Vermögenswert, dass der Erwartungswert gegeben den Preis  $V_0$ <sup>15</sup> der diskontierten Preise jedes Vermögenswerts unter dem Martingalmaß  $Q$  dem Wert eines risikolosen Vermögenswerts für alle künftigen Zeiträume  $\tau_k$  entspricht. Bei konstanter Zinsstruktur heißt das für den risikobehafteten Vermögenswert:<sup>16</sup>

<sup>13</sup>Vgl. hierzu etwa Øksendal (1998), S. 256. Aufgrund der Eindimensionalität sind die Bedingungen bezüglich einer Existenz für ein System irrelevant. Diese Bedingung kann verallgemeinert werden. Vgl. Musiela/Rutkowski (1997), S. 246 f. und die dort angegebene Literatur. Für das vorliegende Bewertungsproblem ist aber die angegebene Gleichung ausreichend.

<sup>14</sup>Zum Martingalmaß hier und im Folgenden vgl. etwa Musiela/Rutkowski (1997), S. 45 ff.

<sup>15</sup>Oder genauer gesagt, die durch diesen Preisprozess induzierte  $\sigma$ -Algebra.

<sup>16</sup>In diesem Hauptabschnitt wird auf die Verwendung des Lebesgue-Integral zu Gunsten des Riemann-Integrals verzichtet, da letzteres eine deutlich größere Verbreitung beim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_0 \exp(x_k) dQ = V_0 \exp(r\tau_k) \quad (3.3.2)$$

mit

$$x_k \in \{x \mid x \text{ ist } Q\text{-verteilt}\} \quad \forall \tau_k < +\infty \text{ f.s.}$$

Statt nach einer Lösung für ein geeignetes Martingalmass  $Q$  zu suchen, wird nun dem Leser der Vorschlag unterbreitet, weiterhin ein Mitglied der Klasse Normalverteilung  $NV(\mu_k, \sigma_k)$  zu unterstellen, allerdings mit verändertem Erwartungswert:<sup>17</sup>

$$\mu_k = -\frac{1}{2}\sigma_k^2 + r\tau_k. \quad (3.3.3)$$

Ist dies für  $\mu_k$  erfüllt, gilt die Martingalgleichung. Denn setzt man  $\mu_k$  in die linke Seite der Gleichung (3.3.2) ein, erhält man für die linke Seite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_0 \exp(x_k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left(-\frac{(x_k + \frac{1}{2}\sigma_k^2 - r\tau_k)^2}{2\sigma_k^2}\right) dx_k.$$

Mit der Standardsubstitution<sup>18</sup> zur Beseitigung des ersten Exponenten, die für jeden beliebigen Zeitraum  $\tau_k$  durchgeführt werden kann,

$$x_k = \ln v \text{ bzw. } dx_k = \frac{1}{v} dv$$

ergibt dies

$$\int_0^{+\infty} V_0 v \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left(-\frac{(\ln v + \frac{1}{2}\sigma_k^2 - r\tau_k)^2}{2\sigma_k^2}\right) \frac{1}{v} dv.$$

Der Integralausdruck stellt dabei den Erwartungswert einer lognormalverteilten Zufallsvariablen dar. Setzt man wiederum

$$w = \frac{\ln v + \frac{1}{2}\sigma_k^2 - r\tau_k}{\sigma_k}$$

bzw.

$$v = \exp\left(\sigma_k w - \frac{1}{2}\sigma_k^2 + r\tau_k\right) \text{ bzw. } dv = \sigma_k \exp\left(\sigma_k w - \frac{1}{2}\sigma_k^2 + r\tau_k\right) dw$$

betriebswirtschaftlichen Adressatenkreis besitzt. Somit wird auch auf die explizite Erwähnung eventuell vorhandener Nullmengen verzichtet.

<sup>17</sup>Dies entspricht der bekannten Veränderung des Drifts eines Diffusionsprozesses. Vgl. Øksendal (1998), S. 153 f.

<sup>18</sup>Vgl. Bosch (1992), S. 276.

erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) \sigma_k \exp\left(\sigma_k w - \frac{1}{2}\sigma_k^2 + r\tau_k\right) dw.$$

Der Term kann umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} V_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(w^2 - 2\sigma_k w + \sigma_k^2) + r\tau_k\right) dw = \\ V_0 \exp(r\tau_k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(w - \sigma_k)^2\right) dw. \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $u = w - \sigma_k$  entspricht der Integralausdruck dem Integral über die Standardnormalverteilung

$$V_0 \exp(r\tau_k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = V_0 \exp(r\tau_k). \quad (3.3.4)$$

Nach der Definition des Martingals gilt diese Gleichung für jeden Zeitraum  $\tau_k$ , insbesondere aber für die Zeiträume  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  und für den Zeitraum  $\hat{\tau} = \tau_2 - \tau_1$ , der zum Zeitpunkt  $t_1$  beginnt und damit von einem Startwert  $V_1$  ausgeht.<sup>19</sup> Damit wurde nachgewiesen, dass das vorgeschlagene Wahrscheinlichkeitsmaß ein Martingalmaß ist. Der Satz von *Girsanov* bringt nachträglich die Rechtfertigung für das Vorgehen nur den Erwartungswert zu ändern.<sup>20</sup> Somit können Compound-Optionen mit diesem Martingalmaß bewertet werden.

### 3.3.3 Wert von Compound-Optionen

Die Martingalgleichung muss auch für Compound-Optionen gelten. So ergibt sich der Wert der 2. Option zum Zeitpunkt  $t_1$  mit Laufzeit  $\hat{\tau}$  als der diskontierte erwartete Zahlungsüberschuss der 2. Option bzgl. des Martingalmaßes  $Q$  gegeben eine bestimmte stetige Rendite  $x_1 = x_2 - x_{\hat{\tau}}$ .<sup>21</sup>

$$S_1(x_1) = \exp(-r\hat{\tau}) E_Q((V_0 \exp(x_{\hat{\tau}} + x_1) - B_2)^+ | x_1) \quad (3.3.5)$$

<sup>19</sup>Anzumerken ist, dass wiederum die Martingalgleichung gilt:

$$E_Q(V_2 | V_1) = V_1 \exp(r\hat{\tau}).$$

<sup>20</sup>Vgl. Øksendal (1998), S. 152 ff. Dass nur ein Wiener-Prozess das Ergebnis der Maßtransformation sein kann, ergibt sich aus Lévy's Charakterisierungssatz. Vgl. Bauer (1991), S. 407 und in einer Erweiterung S. 495.

<sup>21</sup>Diese Vorgehensweise steht dabei im Widerspruch zu dem Herleitungsvorschlag bei Geske, vgl. Geske (1979), S. 69 f., was im Abschnitt 3.3.4 noch erläutert wird.

oder unter Verwendung des oben ausgeführten Martingalmaßes, der bedingten Dichtefunktion  $f(x_{\hat{\tau}} | x_1)$

$$\exp(-r\hat{\tau}) \int_{-\infty}^{+\infty} (V_0 \exp(x_{\hat{\tau}} + x_1) - B_2)^+ f(x_{\hat{\tau}} | x_1) dx_{\hat{\tau}}.$$

Verwendet man nun die definitorische Eigenschaft des Wiener-Prozesses, dass die Prozessänderung ab einem Zeitpunkt  $x_{\hat{\tau}}$  immer unabhängig von der Prozessentwicklung  $x_1$  bis zu diesem Zeitpunkt  $t_1$  ist,<sup>22</sup> folgt daraus

$$f(x_{\hat{\tau}} | x_1) = f(x_{\hat{\tau}}).$$

Zur Auflösung der Maximumsfunktion muss die untere Integrationsgrenze angepasst werden. Für positive Integranden, d.h. für  $V_0 \exp(x_{\hat{\tau}} + x_1) - B_2 > 0$ , ergibt dies

$$S_1(x_1) = \quad (3.3.6)$$

$$\exp(-r\hat{\tau}) \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - x_1}^{+\infty} (V_0 \exp(x_{\hat{\tau}} + x_1) - B_2) f(x_{\hat{\tau}}) dx_{\hat{\tau}}$$

oder unter Berücksichtigung der univariaten Normalverteilungsfunktion  $NV_1(-\frac{1}{2}\sigma_{\hat{\tau}}^2 + r\hat{\tau}, \sigma_{\hat{\tau}})$  der stetigen Renditen für den Zeitraum  $\hat{\tau}$  erhält man

$$\exp(-r\hat{\tau}) \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - x_1}^{+\infty} (V_0 \exp(x_{\hat{\tau}} + x_1) - B_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{\tau}}} \exp\left(-\frac{(x_{\hat{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma_{\hat{\tau}}^2 - r\hat{\tau})^2}{2\sigma_{\hat{\tau}}^2}\right) dx_{\hat{\tau}}.$$

Den Wert der 1. Option zum Zeitpunkt  $t_0$  erhält man als den diskontierten erwarteten Zahlungsüberschuss aus der Option bzgl. des Martingalmaßes  $Q$ :

$$C_0 = \exp(-r\tau_1) E_Q((S_1(x_1) - B_1)^+) = \quad (3.3.7)$$

$$\exp(-r\tau_1) \int_{-\infty}^{+\infty} (S_1(x_1) - B_1)^+ f(x_1) dx_1.$$

Abbildung 3.2 veranschaulicht die jeweiligen Verteilungen und Bewertungen zu den unterschiedlichen Zeitschritten  $\tau_1$  und  $\tau_2$ .

$S_1(x_1)$  in Formel (3.3.7) eingesetzt, resultiert in

$$C_0 = \exp(-r\tau_1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \exp(-r\hat{\tau}) \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - x_1}^{+\infty} (V_0 \exp(x_{\hat{\tau}} + x_1) - B_2) f(x_{\hat{\tau}}) dx_{\hat{\tau}} - B_1 \right)^+ f(x_1) dx_1.$$

<sup>22</sup>Vgl. etwa Bauer (1991), S. 352 f.

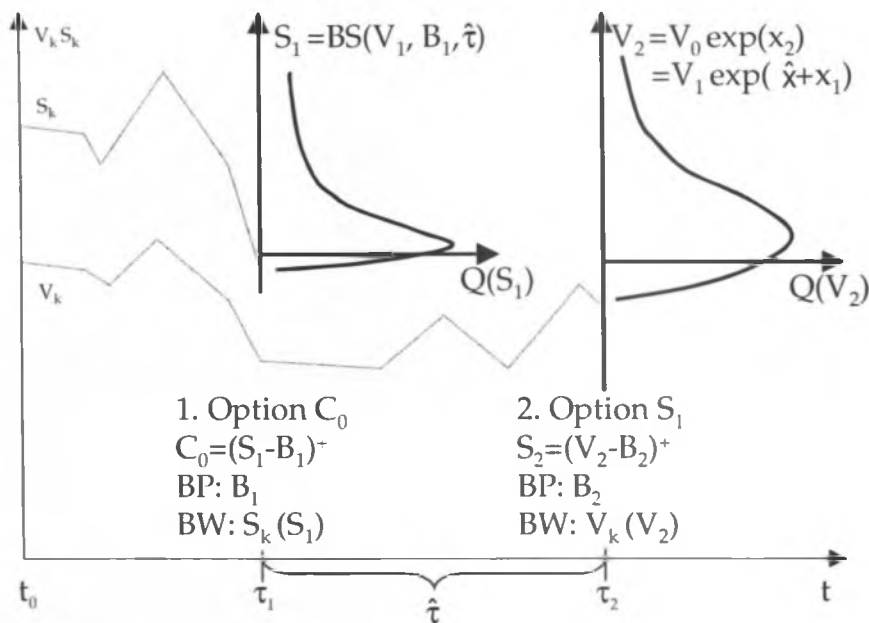


Abbildung 3.2: Prozesse bei der Bewertung von Compound-Optionen

Nach Auflösung der Maximumsfunktion muss wiederum die untere Integrationsgrenze angepasst werden:

$$C_0 = \exp(-r\tau_1) \quad (3.3.8)$$

$$\int_{x_1^*}^{+\infty} \left( \exp(-r\hat{\tau}) \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - x_1}^{+\infty} (V_0 \exp(x_{\hat{\tau}} + x_1) - B_2) f(x_{\hat{\tau}}) dx_{\hat{\tau}} - B_1 \right) f(x_1) dx_1.$$

Dabei stellt  $x_1^*$  den Wert  $x_1$  dar, bei dem

$$S_1(x_1) = B_1, \quad (3.3.9)$$

also die Ausübungsbedingung für die modifizierte Optionsbewertungsformel (3.3.6) erfüllt ist. Der Wert  $x_1^*$  lässt sich wieder als Verhältnis des Preises, bei dem die 1. Option ausgeübt wird,  $V_1^*$  und des Preises  $V_0$  ausdrücken:

$$x_1^* = \ln \left( \frac{V_1^*}{V_0} \right).$$



Die Gleichung (3.3.8) kann in drei Komponenten zerlegt werden und dann gelöst werden. Die Integration der Komponenten ist dabei rein technischer Natur, so dass sie nur im Anhang B.2 aufgeführt ist. Sie ergibt folgendes Resultat:

$$C_0 = V_0 NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{V_1^*} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1}, \frac{\ln \frac{V_0}{B_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 + r\tau_2}{\sigma_2}, \frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_2}} \right) - \quad (3.3.10)$$

$$\exp(-r\tau_2) B_2 NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{V_1^*} - \frac{1}{2} \sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1}, \frac{\ln \frac{V_0}{B_2} - \frac{1}{2} \sigma_2^2 + r\tau_2}{\sigma_2}, \frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_2}} \right) -$$

$$\exp(-r\tau_1) B_1 NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{V_1^*} - \frac{1}{2} \sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1} \right),$$

wobei  $NV_1()$  die kumulierten Wahrscheinlichkeiten für die eindimensionale und  $NV_2(, ,)$  für die zweidimensionale Normalverteilungsfunktion darstellt. Dieses Resultat entspricht dem, das Geske mit Hilfe des Differentialgleichungsansatzes abgeleitet hat.<sup>23</sup> Es kann mit Hilfe des Martingalansatzes nun anschaulich interpretiert werden: Der erste Term stellt den erwarteten Erlös für den Basiswert bzgl. des Martingalmaßes dar, falls sowohl die 1. als auch die 2. Option ausgeübt wird. Der zweite Term stellt die erwarteten Zahlung für den Basiswert der 1. Option, der letzte für den Basiswert der 2. Option dar.

### 3.3.4 Vergleich mit dem Lösungsvorschlag von Geske

An dieser Stelle soll ein Vergleich mit dem Lösungsvorschlag von Geske gemacht werden. Bei Anwendung des Martingalansatzes ermittelt Geske im ersten Schritt den Erwartungswert der Zahlungsüberschüsse über die Auszahlungen aus der 1. Option, gegeben einen bestimmten Wert für den Preisprozess im Zeitpunkt  $t_2$ .<sup>24</sup> In der Terminologie dieses Abschnitts entspricht dies dem Erwartungswert, gegeben eine bestimmte stetige Rendite  $x_2$ . Im zweiten Schritt wird dann der unbedingte Erwartungswert über die Auszahlungen der 2. Option eingesetzt. Dies ergibt

$$C_0 = \exp(-r\tau_1) \left( \int_{B_1}^{+\infty} V_2 NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{B_2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 + r\hat{\tau}}{\sigma_2} \right) f(V_1 | V_2) dV_2 \right. \quad (3.3.11)$$

$$\left. - B_2 \exp(-r\hat{\tau}) \int_{B_1}^{+\infty} NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{B_2} - \frac{1}{2} \sigma_2^2 + r\hat{\tau}}{\sigma_2} \right) f(V_1 | V_2) dV_2 \right)$$

<sup>23</sup>Vgl. Geske (1979), S. 68 f.

<sup>24</sup>Vgl. Geske (1979), S. 70.

$$-B_1 \int_{B_1}^{+\infty} f(V_1 | V_2) dV_2 \Bigg).$$

Dass die Vorgehensweise, so wie dargestellt, nicht zu dem Endergebnis, das sich mit Hilfe des Differentialgleichungsansatzes ableiten lässt, führen kann, ist im Anhang B.1 ausgeführt. Es kann aber gezeigt werden, dass die Idee von Geske bei korrekter Ausführung, wie nachfolgend dargestellt,

$$\begin{aligned} C_0 = & \exp(-r\tau_1) \left( \int_{V_{1*}}^{+\infty} V_1 N V_1 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{B_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1} \right) f(V_1 | V_2 > B_2) dV_1 \right. \\ & - B_2 \exp(-r\tau_1) \int_{V_{1*}}^{+\infty} N V_1 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{B_2} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1} \right) f(V_1 | V_2 > B_2) dV_1 \\ & \left. - B_1 \int_{V_{1*}}^{+\infty} f(V_1) dV_1 \right) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

zum obigen Ergebnis führen kann. Die Idee stellt nur eine Vertauschung der bedingten und unbedingten Variablen bzw. Verteilungen dar. Mit dem Bayesschen Satz lässt sich dann deren Äquivalenz zeigen.<sup>25</sup>

## 3.4 Erweiterungen des Compound-Option Modells

### 3.4.1 Diskrete Barrier-Optionen

Diese Herleitung ermöglicht nun die angesprochenen alternativen Interpretationen der Bewertungsformel. Ergänzt man den letzten Term aus Gleichung (3.3.10) um

$$+ \exp(-r\tau_1)(B_1 - B_1) = 0,$$

erhält man folgende neue Formel:

$$\begin{aligned} C_0 = & V_0 N V_2 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{V_{1*}} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1}, \frac{\ln \frac{V_0}{B_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + r\tau_2}{\sigma_2}, \frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_2}} \right) - \\ & \exp(-r\tau_2) B_2 N V_2 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{V_{1*}} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1}, \frac{\ln \frac{V_0}{B_2} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 + r\tau_2}{\sigma_2}, \frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_2}} \right) + \\ & \exp(-r\tau_1) B_1 \left( 1 - N V_1 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{V_{1*}} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1} \right) \right) - \exp(-r\tau_1) B_1. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

<sup>25</sup>Vgl. etwa Bosch (1992), S. 114.

Das Bewertungsergebnis der Compound-Option kann damit als das Bewertungsergebnis eines Portfolios aus einer diskreten Down-and-Out-Option, einer speziellen Barrier-Option,<sup>26</sup> und einer verkauften Anleihe angesehen werden.

Dazu muss die Ausübungsbedingung für die 1. Option im Compound-Option-Modell, die Maximumsbedingung, durch die Bedingung, dass die Barrier im Zeitpunkt  $t_1$  nicht unterschritten wird, ersetzt werden. Dass dies problemlos möglich ist, lässt sich an Gleichung (3.3.7) demonstrieren. Verzichtet man auf die Maximumsfunktion und ersetzt die Untergrenze des Integrals  $x_1^*$  durch eine exogen gegebenen Ausübungsbedingung,  $x_1 > x_1^e$  für die stetige Rendite bzw.  $V_1 > B_e = V_1^*$  für den Basiswert, erhält man:

$$\begin{aligned} C_0 &= \exp(-r\tau_1) \int_{x_1^e}^{+\infty} (S_1(x_1) - B_1) f(x_1) dx_1 \quad (3.4.2) \\ &= \exp(-r\tau_1) \left( \int_{x_1^e}^{+\infty} S_1(x_1) f(x_1) dx_1 + B_1 \left( 1 - \int_{x_1^e}^{+\infty} f(x_1) dx_1 \right) + B_1 \right). \end{aligned}$$

Das erste Integral führt dann zu den ersten beiden Zeilen aus Gleichung (3.4.1), die beiden weiteren Terme zur dritten Zeile.<sup>27</sup> Die beiden ersten Terme der Gleichung (3.4.1) können als Zahlungen aus einer diskreten Down-and-Out-Option verstanden werden, deren Auszahlungsfunktion durch  $(V_2 - B_2; 0)^+$  im Zeitpunkt  $t_2$  gegeben ist und deren Underlying, um ein Fortbestehen des Optionsrechts zu gewährleisten, im Zeitpunkt  $t_1$  die Barrier-Bedingung  $V_1 > B_e$  erfüllen muss. Weiterhin wird im Falle des Unterschreitens der Barrier nach  $\tau_1$  eine Rebate von  $B_1$  bezahlt. Der Wert dieser Zahlung entspricht dabei dem dritten Term. Der letzte Term repräsentiert den Wert einer verkauften Nullkuponanleihe mit Laufzeit  $\tau_1$  und Rückzahlung  $B_1$ .<sup>28</sup>

Compound-Optionen lassen sich auch auf Konstrukte mit 3 oder mehr Optionen erweitern. Dann existiert in der Terminologie dieses Abschnitts eine 1. Option mit Basispreis  $B_1$  und Laufzeit  $\tau_1$  auf eine zweite Option mit Basispreis  $B_2$  und Gesamtlaufzeit  $\tau_2$  auf eine dritte Option mit Basispreis  $B_3$  und Gesamtlaufzeit  $\tau_3$  etc. Der Wert einer solchen Konstruktion mit  $\nu$  Optionen lässt sich analog zum Vorgehen im vorherigen Abschnitt bestimmen:<sup>29</sup>

$$C_0 = \quad (3.4.3)$$

<sup>26</sup>Zur Definition und Bewertung diskreter Down-and-Out-Optionen vgl. etwa **Steiner et al.** (1999), S. 148 ff.

<sup>27</sup>Man beachte die unabhängige Wahl von  $B_e$ .

<sup>28</sup>Die in Abschnitt 3.3.1 und 3.3.2 diskutierten Anforderungen der Martingalanstätze gelten analog auch für diese Barrier-Option.

<sup>29</sup>Vgl. das analoge Vorgehen für Kuponanleihen mit der CPRA-Methode in **Geske** (1977), S. 542 ff.

$$V_0 NV_\nu \left( \frac{\ln \frac{V_0}{V_{1*}} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1}, \frac{\ln \frac{V_0}{V_{2*}} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + r\tau_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\ln \frac{V_0}{B_\nu} + \frac{1}{2}\sigma_\nu^2 + r\tau_\nu}{\sigma_\nu}, \Lambda_\nu \right) - \sum_{k=2}^{\nu} \exp(-r\tau_k) B_k NV_k(\mathcal{H}_k, \Lambda_k) - \exp(-r\tau_1) B_1 NV_1(\mathcal{H}_1)$$

mit

$$\mathcal{H}_k = \left( \frac{\ln \frac{V_0}{V_{1*}} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1}, \frac{\ln \frac{V_0}{V_{2*}} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 + r\tau_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\ln \frac{V_0}{V_{k*}} - \frac{1}{2}\sigma_k^2 + r\tau_k}{\sigma_k} \right)$$

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_2}}, & \frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_3}}, & \dots, & \frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_{k-1}}}, & \frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_k}} \\ \frac{\sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\tau_3}}, & \frac{\sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\tau_4}}, & \dots, & \frac{\sqrt{\tau_2}}{\sqrt{\tau_k}} \\ \vdots & & & \\ \frac{\sqrt{\tau_{k-1}}}{\sqrt{\tau_k}} \end{pmatrix},$$

wobei  $V_{k*}$  aus der in (3.3.9) definierten Gleichung

$$S_k(x_k) = B_k$$

hervorgeht und  $S_k(x_k)$  den Kurs des Basiswerts der  $k$ -ten Option für die Gesamtlaufzeit  $\tau_k$  darstellt.<sup>30</sup>

Ersetzt man analog zum Fall  $\nu = 2$   $V_{k*}$  durch  $B_{ek} \forall k < \nu$ ,  $B_{e\nu} = B_\nu$  und ergänzt die Gleichung um  $\sum_{k=1}^n \exp(-r\tau_k) B_k - \sum_{k=1}^n \exp(-r\tau_k) B_k = 0$ , erhält man:<sup>31</sup>

$$C_0 = \quad (3.4.4)$$

$$V_0 NV_n \left( \frac{\ln \frac{V_0}{B_{e1}} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1}, \frac{\ln \frac{V_0}{B_{e2}} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + r\tau_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\ln \frac{V_0}{B_{e\nu}} + \frac{1}{2}\sigma_\nu^2 + r\tau_\nu}{\sigma_\nu}, \Lambda_\nu \right) + \sum_{k=2}^{\nu} \exp(-r\tau_k) B_k (1 - NV_k(\mathcal{H}_k, \Lambda_k)) + \exp(-r\tau_1) B_1 (1 - NV_1(\mathcal{H}_1)) - \sum_{k=1}^n \exp(-r\tau_k) B_k.$$

Verzichtet man auf die letzte Summe, die leerverkaufte Tilgungsanleihe, erhält man eine Darstellung für eine diskrete Down-and-Out-Option mit  $\nu$  Ausübungszeitpunkten,  $B_{ek}$  als diskrete Barriers und  $B_k$  als Rebates. Enthalten ist hier auch der Standardfall, dass Barrier  $B_{ek} = B = \text{konst.}$  und Rebate  $B_k = B_R = \text{konst.} \forall k < \nu$  sind. Dieses Modell lässt sich problemlos auf andere Typen von diskreten Barrier-Optionen wie Up-and-Out- oder Down-and-In-Optionen übertragen. Schließlich können Compound-Optionen auch aus Verkaufsoptionen und leerverkauften Optionen konstruiert werden.

<sup>30</sup>Im Falle  $k = \nu$  reduziert sich diese Bedingung zu  $S_\nu(x_\nu) = V_\nu = B_\nu$ .

<sup>31</sup>Eine entsprechende Anpassung der  $\mathcal{H}_k$  an die neuen  $B_{ek}$  wird angenommen.

### 3.4.2 Optionen auf mehrere riskante Vermögenswerte in der Grundkonzeption

Geht man zunächst wieder von der Compound-Option mit zwei Stufen aus, kann man sich von der Vorstellung lösen, dass ein einzelner Vermögenswert die zwei für die Bewertung relevanten Verteilungen zu den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  generiert. Stattdessen können die zwei Verteilungen als Verteilungen zweier Vermögenswerte A und B angesehen werden.<sup>32</sup> Man betrachtet dazu, wie in Abschnitt 1.2.1 definiert, einen stochastischen Prozess nicht auf der geordneten Menge Zeit, sondern auf der geordneten Menge Vermögenswerte.<sup>33</sup> Die Verteilungen der beide Vermögenswerte können als Randverteilungen zweier geometrischer Brownscher Bewegungen mit den Standardabweichungen  $\sigma_A$  anstelle von  $\sigma_1$  und  $\sigma_B$  anstelle von  $\sigma_2$  angesehen werden, die nicht hauptsächlich aufgrund der Laufzeitunterschiede, sondern mit

$$\rho_{AB} = \frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_2}} \quad (3.4.5)$$

korreliert sind. Zur Veranschaulichung soll Abbildung 3.3 dienen.

---

<sup>32</sup>Man sieht, dass mit dem Differentialgleichungsansatz die Uminterpretation nicht so leicht möglich ist, da hier die stochastischen Prozesse für die Vermögenswerte A und B zur Bildung der Duplikationsstrategie neu entwickelt werden müssen. Vgl. allgemein **Musiela/Rutkowski** (1997), S. 112 f. und S. 127 ff. oder speziell bei Compound-Optionen **Geske** (1979), S. 65 ff.

<sup>33</sup>Vgl. **Bauer** (1991), S. 304.

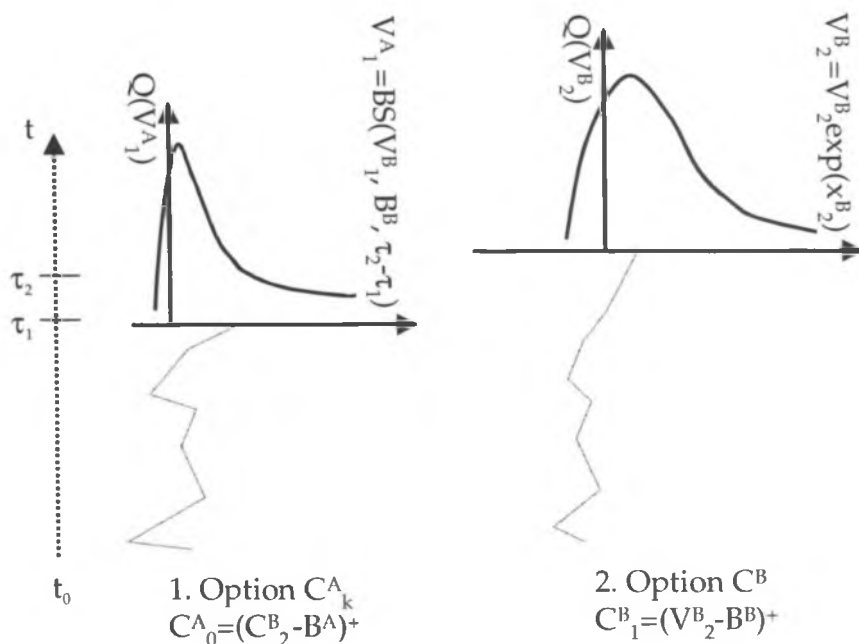


Abbildung 3.3: Transfer von bedingten Optionsproblemen auf Mehrprozess-Probleme

Im Vergleich zu 3.2 werden die Achsen vertauscht, so dass der gedachte Prozess nun auf der Menge der Vermögenswerte A und B abläuft. Die einzige Schwierigkeit<sup>34</sup> besteht nun darin, eine Transformation der abhängigen Zufallsvariablen für die stetigen Renditen in unabhängige Zufallsvariablen zu finden, die der Transformation in Gleichung (3.3.6) entspricht. Eine solche Transformation kann immer durch die Einführung der beiden, hier bereits standardisierten Substitutionsvariablen

<sup>34</sup>Für den Existenznachweis eines Martingalmaßes bei mehreren Brownschen Bewegungen muss neben der sicherlich erfüllten Bedingung aus (3.3.1) eine Bedingung bzgl. der Dimension des Gleichungssystems erfüllt sein. Vgl. Øksendal (1998), S. 256 ff. Im vorliegenden Fall konstanter instantaner Erwartungswerte und Varianzen sowie konstanter Zinssätze für die risikolose Anlagemöglichkeit reduziert sich diese Bedingung in eine, die das zulässige Verhalten der erwarteten Überrendite in Abhängigkeit der ihrer Varianzen und Kovarianzen festlegt. Sie ist dann erfüllt, wenn das zu Grunde liegende Preissystem arbitragefrei ist. Vgl. Musiela/Rutkowski (1997), S. 248 f. Im Falle einer umgedeuteten Compound-Option ist die Bedingung automatisch erfüllt. Bei einem frei gewählten Problem von Optionen auf mehrere riskante Vermögenswerte wird vorausgesetzt, dass das Problem ex ante entsprechend formuliert wurde.

$$u_1 = \frac{x_A - \mu_A}{\sigma_A} \quad (3.4.6)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{AB}^2}} \left( \frac{x_B - \mu_B}{\sigma_B} - \rho_{AB} \frac{x_A - \mu_A}{\sigma_A} \right) \quad (3.4.7)$$

erzielt werden.<sup>35</sup> Vergleicht man diese Transformation mit der aus Gleichung (3.3.6), lässt sich erkennen, dass sie zumindest für nichtnegative Korrelationen äquivalent ist. Die Standardisierung der Renditen des einzelnen Vermögenswertes zum Zeitpunkt  $\tau_1$   $x_1$

$$u_1 = \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}$$

entspricht der der Renditen von A. Dass die beiden anderen sich entsprechen, zeigt sich, wenn die Renditen  $x_1$  und  $x_2$  mit den zugehörigen Verteilungsparametern in (3.4.7) eingesetzt werden:

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}}} \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} - \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right).$$

Mit einigen Modifikationen<sup>36</sup> erhält man

$$u_2 = \frac{x_2 - \mu_2 - x_1 + \mu_1}{\frac{\sigma_2}{\sqrt{\tau_2}} \sqrt{\tau_2 - \tau_1}} = \frac{x_{\bar{\tau}} - \mu_{\bar{\tau}}}{\sigma_{\bar{\tau}}}.$$

Für negative Korrelationskoeffizienten ist die Äquivalenz nicht gegeben, da Gleichung (3.4.5) nicht erfüllt ist. Lässt man aber eine imaginäre Zeitachse zu, gilt die Äquivalenz auch bei negativen Korrelationskoeffizienten.<sup>37</sup>

Nach diesen Vorüberlegungen kann die Formel zur Barrier-Optionsbewertung (3.4.1) umgeschrieben werden, wobei noch die rein bezeichnungstechnische Änderung der Basispreise  $B_B$  anstelle von  $B_2$ ,  $B_A$  anstelle von  $B_1$  und  $B_e$  anstelle von  $V_1^*$  eingesetzt werden muss.<sup>38</sup> Somit ergibt sich für den Optionswert:

$$C_0 = V_B N V_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r \tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{B_B} + \frac{1}{2} \sigma_B^2 + r \tau_2}{\sigma_B}, \rho_{AB} \right) - \quad (3.4.8)$$

<sup>35</sup>Vgl. z.B. **Bosch** (1992), S. 280. Man beachte weiterhin, dass die Standardisierung unter dem Q-Maß stattfinden muss.

<sup>36</sup>Bei den Modifikationen werden die im Anhang B.3 dargestellten Zusammenhänge zwischen Zeit, Standardabweichung und Korrelationskoeffizient benötigt.

<sup>37</sup>Die Parametermenge, auf der ein stochastischer Prozess definiert ist, ist allerdings nicht unbedingt auf die reelle Zahlenmenge beschränkt. Vgl. **Bauer** (1991), S. 304.

<sup>38</sup>Genau genommen wird  $\frac{V_0}{B_1}$  durch  $\frac{V_A}{B_e}$  und  $\frac{V_0}{B_2}$  durch  $\frac{V_B}{B_B}$  ersetzt. Somit wird nur der Quotient geändert. Der Dividend kann als konstant angesehen werden.

$$\exp(-r\tau_2)B_B NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{B_B} - \frac{1}{2}\sigma_B^2 + r\tau_2}{\sigma_B}, \rho_{AB} \right) + \\ \exp(-r\tau_1)B_A \left( 1 - NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A} \right) \right) - \exp(-r\tau_1)B_A.$$

Resümierend kann die Compound-Option als ein Portfolio aus einer diskreten Down-and-Out-Option auf zwei Basiswerte A und B und einer Nullkuponanleihe verstanden werden. Die diskrete Down-and-Out-Option kann dann ausgeübt werden, falls der Preis von A die Barrier  $B_e$  zum Zeitpunkt  $t_1$  nicht unterschreitet. In diesem Fall erhält der Optionsinhaber  $(V_B - B_B; 0)^+$  zum Zeitpunkt  $t_2$ , bei Unterschreiten der Barrier erlöst er die Rebate  $B_A$  zum Zeitpunkt  $t_1$ .<sup>39</sup>

### 3.4.3 Maximum-Optionen

Dieser Optionstyp wirkt und ist zugegebenermaßen konstruiert. Die zentrale Überlegung, aus einer Zufallsvariable zu zwei Zeitpunkten zwei Zufallsvariablen und umgekehrt machen zu können, kann aber in vielen Bereichen eingesetzt werden. Als eine Einsatzmöglichkeit soll hier das klassische Beispiel der Bewertung einer Option auf das Maximum von zwei riskanten Vermögenswerten herangezogen werden.<sup>40</sup> Diese Option gewährt dem Erwerber das Recht, entweder den Vermögenswert A oder den Vermögenswert B zu einem festgelegten Basispreis  $B_e$  zu erwerben. Sie lässt sich zerlegen in ein Portfolio aus zwei Compound-Optionen,

- eine europäische Kaufoption I auf Basiswert A mit Basispreis  $B_e$ . Liegt der Preis des Basiswerts A über dem Basispreis, respektive die Rendite über einer festgelegten Rendite  $x^e$ , wird die Option gewährt, den bezogenen Vermögenswert A gegen den weiteren B zu tauschen,

und

- eine europäische Kaufoption II auf den Vermögenswert B mit Basispreis  $B_e$ , die nur ausgeübt werden kann, falls der Preis des Vermögenswerts A unter dem Basispreis  $B_e$ , respektive die Rendite unter einer festgelegten Rendite  $x^e$  liegt.

Der Preis letzterer kann analog zu Gleichung (3.4.1) abgeleitet werden mit drei Unterschieden:

<sup>39</sup>Die Laufzeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$  können auch zusammenfallen.

<sup>40</sup>Vgl. Stulz (1982), S. 162 ff.



1. Die Bezeichnungen müssen, wie im oberen Teil dieses Abschnitts bereits durchgeführt, auf zwei Vermögenswerte hin abgeändert werden.
2. Die Integrationsgrenzen müssen verändert werden, da hier der Preis von A zur Ausübung nicht oberhalb, sondern unterhalb der Barrier liegen muss.<sup>41</sup> Dazu muss die Ausübungswahrscheinlichkeit über die Gegenwahrscheinlichkeit bestimmt werden.
3. Es findet keine Zahlung aus dieser Option statt, falls der Preis von A über der Barrier liegt; d.h. auf den letzten Subtrahend wird verzichtet.

Danach verändert sich die Gleichung (3.3.7) zu

$$C_0 = \exp(-r\tau_1) \int_{-\infty}^{x^e} S_B(x_A) f(x_A) dx_A. \quad (3.4.9)$$

Die Berechnung dieses Integrals liefert dann als Ergebnis, die ersten beiden Terme der Gleichung (3.4.1) mit dem Unterschied, dass die veränderten Integrationsgrenzen einen Vorzeichenwechsel beim jeweils ersten Parameter der Normalverteilung bewirken:

$$C_0 = V_B N V_2 \left( \frac{-\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2} \sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{B_e} + \frac{1}{2} \sigma_B^2 + r\tau_1}{\sigma_B}, -\rho_{AB} \right) - \exp(-r\tau_1) B_e N V_2 \left( \frac{-\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2} \sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{B_e} - \frac{1}{2} \sigma_B^2 + r\tau_1}{\sigma_B}, -\rho_{AB} \right). \quad (3.4.10)$$

Die Bestimmung der Option I des Portfolios erfolgt von der Idee analog mit etwas größeren Aufwand, da ein Ableiten des Bewertungsergebnisses rein über Vergleich nur mit komplexen Schlüssen möglich ist. Analog zu (3.4.9) ergibt sich

$$C_0 = \exp(-r\tau_1) \int_{x^e}^{+\infty} C(x_B, x_A) + (V_A \exp(x_A) - B_e) f(x_A) dx_A, \quad (3.4.11)$$

wobei nun über den oberen Teil von  $\mathbb{R}$  integriert wird und zusätzlich die europäische Kaufoption mit Basispreis  $B_e$  zu berücksichtigen ist. Weiterhin wurde

$$C(x_B, x_A) = \int_{-\infty}^{+\infty} (V_B \exp(x_B) - V_A \exp(x_A))^+ f(x_B | x_A) dx_B$$

als Tauschoption definiert. Für positiven Integranden muss gelten

$$x_B > \ln \frac{V_A}{V_B} + x_A,$$

<sup>41</sup> Dass der Preis auf der Barrier liegt, ist für die Bewertung uninteressant, da dies eine Nullmenge in der reellen Zahlenebene darstellt.

wodurch sich (3.4.11) zu

$$C_0 = \exp(-r\tau_1) \int_{x^e}^{+\infty} \int_{\ln \frac{V_A}{V_B} + x_A}^{+\infty} (V_B \exp(x_B) - V_A \exp(x_A)) \quad (3.4.12)$$

$$f(x_B | x_A) dx_B f(x_A) dx_A$$

$$+ \exp(-r\tau_1) \int_{x^e}^{+\infty} (V_A \exp(x_A) - B_e) f(x_A) dx_A$$

verändert.

Nach einigen Umformungen, die dem Anhang B.4 entnehmbar sind, erhält man

$$C_0 = V_B NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{1}{2} \sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, -\rho_{ABA} \right) + \quad (3.4.13)$$

$$V_A NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} - \frac{1}{2} \sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, -\rho_{ABA} \right) -$$

$$B_e \exp(-r\tau_1) NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \right),$$

wobei

$$\sigma_{AB}^2 = \sigma_A^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2,$$

$$\rho_{ABB} = \frac{\rho_{AB}\sigma_A - \sigma_B}{\sigma_{AB}}$$

und

$$\rho_{ABA} = \frac{\rho_{AB}\sigma_B - \sigma_A}{\sigma_{AB}}$$

gilt. Die beiden Formeln (3.4.10) und (3.4.13) können zusammengefasst werden.<sup>42</sup> Nach der Zusammenfassung erhält man das Resultat von Stulz:<sup>43</sup>

$$C_0 = V_B NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_B}{B_e} + \frac{1}{2} \sigma_B^2 + r\tau_1}{\sigma_B}, \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{1}{2} \sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, -\rho_{ABB} \right) + \quad (3.4.14)$$

$$V_A NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_A}{V_B} + \frac{1}{2} \sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, -\rho_{ABA} \right) -$$

<sup>42</sup>Dabei kann für die Koeffizienten von  $V_A$  und  $B_e$  die von Selby/Hodges hergeleitete Formel eingesetzt werden. Vgl. Selby/Hodges (1987), S. 348 f. Vgl. dazu auch den Anhang B.5.

<sup>43</sup>Im Übrigen führt Stulz die gesamte Integration im Anhang auf, die analog auf diesen Fall angewendet werden kann. Vgl. Stulz (1982), S. 182 f.

$$B_e \exp(-r\tau_1) \left( 1 - NV_2 \left( \frac{-\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{-\ln \frac{V_B}{B_e} + \frac{1}{2}\sigma_B^2 - r\tau_1}{\sigma_B}, \rho_{AB} \right) \right).$$

Scheut man die technisch aufwendigen Berechnungen nicht, kann das Vorgehen auch auf weitere Optionen mit zwei riskanten Vermögenswerten, wie etwa die Verkaufsoptionen auf zwei riskante Vermögenswerte oder die Kaufoption auf das Minimum von zwei riskanten Vermögenswerten, ausgedehnt werden. Ferner kann die Methode problemlos auf Bewertungen von Optionen auf mehr als zwei riskante Vermögenswerte erweitert werden.

### 3.5 Zusammenfassung

Der Denkansatz zur Bewertung von Compound-Optionen wurde bereits häufiger zur Bewertung verschiedener Optionstypen eingesetzt. Die Herleitung der Bewertungsformel erfolgt dabei klassischerweise mit Hilfe des Differentialgleichungsansatzes. Diesen wählte auch *Robert Geske*, der als erster Compound-Optionen unter dem Arbitragefreiheitsparadigma bewertete. Er deutete aber auch die Möglichkeit einer Herleitung mit dem Martingalan-satz an.

In diesem Hauptabschnitt wurde nun die Bewertung von Compound-Optionen mit Hilfe des Martingalan-satzes durchgeführt. Dabei zeigte sich zweierlei. Zum Einen ist der Vorschlag von *Geske* verbesserungsbedürftig. Zum Anderen kann man auf Basis der Herleitung mit dem Martingalan-satz die grundsätzliche Vorgehensweise bei der Bewertung von Compound-Option ohne Schwierigkeiten auf zwei weitere Bewertungsprobleme übertragen, wie

- die Bewertung von Barrier-Optionen
- und auf die Bewertung von Optionen auf mehr als zwei riskante Vermögenswerte.

So lässt sich nach Modifikation der Ausübungsbedingungen und Erweiterung der zweistufigen Compound-Option zu einer  $\nu$ -stufigen die Formel für eine diskrete Down-and-Out-Option mit  $\nu$  Ausübungszeitpunkten und Rebates ableiten.

Für den zweiten Transfer muss man sich von der Vorstellung eines Basiswerts, dessen Verteilungen zu verschiedenen Zeitpunkten betrachtet werden, lösen. Diese beiden Verteilungen lassen sich umdeuten in die Verteilungen von zwei Basiswerten. Mit dem Denkansatz der Compound-Optionen ergaben sich damit unter gewissen Bedingungen Preise für Optionen auf mehr als zwei riskante Vermögenswerte, was am Beispiel der Maximum-Optionen demonstriert wurde.

Da die beschriebene Umdeutung auch von Verteilungen mehrerer Vermögenswerte auf mehrere Verteilungen eines Vermögenswerts möglich ist, können auch pfadabhängige Optionen, wie Average-Optionen oder Lookback-Optionen, in Optionen auf mehr als einen riskanten Vermögenswert umgedeutet und als solche bewertet werden.





## Kapitel 4

# Überabzählbare Zeit- und überabzählbare oder abzählbare Zustandsmenge - Lévy-Prozess





## 4.1 Problemstellung

Schon Mitte des letzten Jahrhunderts zeigte sich, dass Verteilungen von Aktienrenditen nur unzureichend durch die Normalverteilung, stochastische Prozesse der Renditen nur mangelhaft durch den Wiener-Prozess beschrieben werden können.<sup>1</sup> Trotzdem haben sich Normalverteilungshypothese und die Hypothese, dass Aktienrenditen einem Wiener-Prozess folgen, etabliert. Man denke nur an die Bereiche Kapitalmarktmodelle<sup>2</sup>, Unternehmensbewertung<sup>3</sup>, Risikomanagement<sup>4</sup> oder die Derivatebewertung<sup>5</sup>.

Bei der Derivatebewertung zeigte sich schon früh, dass unter diesen Modellgegebenheiten, speziell für den Aktienrenditeprozess, Abweichungen zwischen Modellwert und Marktwert eines Derivats einstellen können,<sup>6</sup> was sich im bekannten Volatility-Smile in der Literatur manifestiert hat. Neben zahlreichen Lösungsvorschlägen unter Beibehaltung der Normalverteilungshypothese für die Aktienrenditeverteilung zu bestimmten Zeitpunkten<sup>7</sup> wurde in verschiedenen Beiträgen eines begrenzten Autorenkreises der Vorschlag unterbreitet, Annahmen für die Aktienrenditen zu setzen, welche die beobachteten Aktienrenditen besser abbilden.<sup>8</sup> Unterstellt man im Bewertungsmodell, dass Aktienrenditen einem Lévy-Prozess, einer Erweiterung des Wiener-Prozesses folgen, ist es vorstellbar eine Verringerung der Differenzen zwischen Modell- und Marktwerten zu erzielen. Allerdings erkaufte

---

<sup>1</sup>Vgl. etwa **Fama** (1963), S. 428, **Mandelbrot** (1967), S. 396 f., **Osborne** (1959), S. 155 ff. oder im deutschsprachigen Raum vgl. **Krämer/Runde** (2000), S. 669. Neben der Normalverteilungshypothese wurden die Renditezeitreihen auch auf Autokorrelation getestet. Vgl. etwa **Fama** (1965), S. 69 ff.

<sup>2</sup>Im CAPM stellt diese eine der beiden Annahmen bzgl. der Ertrags- und Risikomessung von Aktienrenditen dar. Vgl. bspw. **Kruschwitz** (1995), S. 188 oder im Original **Sharpe** (1964), S. 427 f.

<sup>3</sup>Basierend auf kapitalmarkttheoretischen Modellen ist in vielen Bewertungsmodellen die Normalverteilung versteckt. Vgl. zur Anwendung des CAPM in der Unternehmensbewertung **Ballwieser** (1998), S. 82 f. oder vgl. als einen der Vorreiter für die Kapitalkostenermittlung auf Basis von Gleichgewichtsmodellen **Hamada** (1969), S. 14.

<sup>4</sup>Vgl. etwa **Jorion** (2001), S. 219 ff. und 255 ff. oder **Uhlir/Ausseneg** (1996), S. 832 als einen der ersten Beiträge zur quantitativen Risikomessung mit dem VaR-Konzept im deutschsprachigen Raum.

<sup>5</sup>Vgl. im Original **Black/Scholes** (1973), S. 640 oder als aktuellen Vertreter in der deutschsprachigen Literatur **Steiner/Bruns** (2002), S. 346 ff.

<sup>6</sup>Vgl. **Black** (1975), S. 40 f.

<sup>7</sup>Vgl. als eine der Ersten **Jarrow/Wiggings** (1989), S. 63 ff. **Wallmeier** gibt einen umfassenden Überblick über diese Vorschläge, vgl. **Wallmeier** (2003), S. 90 ff. Diese Modelle bauen dabei grundsätzlich auf Normalverteilungen bzw. dem Wiener-Prozess auf. Zu unterscheiden ist davon die Tatsache, dass nichtnormale Lévy-Prozesse, wie jedes lokale Semimartingal, sich als zeitverschobene Wiener-Prozesse darstellen lassen, die aber eine zusätzliche stochastische Komponente enthalten und damit deren Randverteilung nicht normal ist. Vgl. **Bauer** (1991), S. 495.

<sup>8</sup>Vgl. als eine der Ersten **Madan/Milne** (1991), S. 39 ff.

man sich diese Verbesserung mit dem Nachteil, dass das zu Grunde liegende Preissystem unter dieser Renditeprozessannahme grundsätzlich nicht vollständig ist und damit eine Bewertung ausschließlich auf Basis des Arbitragegedankens nicht möglich ist. Stattdessen müssen weitergehende Bedingungen, wie etwa nutzentheoretische Überlegungen, zum Auffinden eines neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes und damit eines Preisfunktionalis eingesetzt werden.

Ziel dieses Hauptabschnitts ist es zu beschreiben, wie eine Optionsbewertung unter Lévy-Prozessen erfolgen kann und welche Vor- und Nachteile mit dem Setzen dieser Prozessannahme für die Optionsbewertung verbunden sind. In einem zweiten Schritt sollen dann Compound-Optionen unter dieser prozessualen Annahme bewertet werden.

Dieser Hauptabschnitt ist, wie folgt, aufgebaut: Zunächst wird eine kurze Einführung in die Theorie der Lévy-Prozesse und deren Eignung, beobachtete Renditeprozesse abzubilden, gegeben. Dabei wird neben der wahr-scheinlichkeitstheoretischen Beschreibung des stochastischen Prozesses auch auf eine analytische zurückgegriffen. Dadurch kann ein Vergleich zur Modellwelt bei *Black/Scholes* und *Merton*, die auf dem Wiener-Prozess basiert, hergestellt werden.

Im nächsten Abschnitt wird die Möglichkeit der Bewertung auf einem unvollständigen Markt erläutert, falls der Renditeprozess des Basiswerts einem Lévy-Prozess folgt. In der Literatur wird der Einsatz der Esscher-Transformation zum Auffinden eines neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes vorgeschlagen. Die Hintergründe dieses Vorschlags werden im nachfolgenden Abschnitt erläutert und Querverbindungen zu Alternativvorschlägen aufgezeigt.

Als Spezialfall dieses Bewertungsergebnisses erhält man den Wert einer europäischen Kaufoption nach *Black/Scholes* und *Merton*. Weiterhin wird in diesem Abschnitt untersucht, ob die Bewertung von Kaufoptionen unter geeignet kalibrierten Lévy-Prozessen zu geringeren Differenzen zwischen Modell- und Marktwerten führen kann. Ebenso lassen sich aus den Modelloptionspreisen implizite Volatilitäten errechnen, womit untersucht werden kann, ob eine die Empirie besser abbildende Modellierung der Verteilungsfunktion zu am Markt beobachteten Volatilitätsfunktionen, Funktionen mit einem Volatility-Smile, führen kann.

Im letzten Abschnitt wird dann das eigentliche Problem untersucht. Unter Lévy-Prozessen wird ein bedingtes Optionsproblem definiert. Dazu muss ein Martingalmak mit Hilfe der Esschertransformation bestimmt werden. Danach kann dann ein Optionspreis abgeleitet und analysiert werden.

## 4.2 Eigenschaften von Lévy-Prozessen im Vergleich zum Spezialfall Wiener-Prozess

### 4.2.1 Definitionen

Die Grundlagen für die Theorie der Lévy-Prozesse wurden von *Paul Lévy* gelegt.<sup>9</sup> Er definierte eine bestimmte Klasse von Verteilungsfunktionen. Folgen Zufallsvariablen einer Verteilungsfunktion aus dieser Klasse, ist die Verteilungsfunktion einer Verknüpfung<sup>10</sup> dieser Zufallsvariablen auch aus dieser Klasse der Funktionen. Für die Verknüpfungen der Zufallsvariablen existieren dabei verschiedene Möglichkeiten. So wird neben der additiven Verknüpfung der Zufallsvariablen unter Anderem die multiplikative oder die Verknüpfung über Maximumsfunktionen betrachtet.<sup>11</sup>

Für die Modellierung von Aktienrenditezeitreihen werden dabei meist additive Verknüpfungen benutzt.<sup>12</sup> Wie sich später noch zeigen wird, ist diese Eigenschaft des Verbleibens in der gleichen Klasse eine große Hilfestellung bei der Modellierung von Aktienrenditeprozessen.

Diese Eigenschaft ist bei Annahme eines Wiener-Prozesses für Zufallsvariablen, bspw. für Aktienrenditen,  $X_t$  als eine Art zeitlicher Hintereinanderausführung bei der Klasse Normalverteilung  $NV()$  bekannt. Sind etwa die Renditen bis zum Zeitpunkt  $t_1$   $Vert(X_{t_1})$  normalverteilt und ist weiterhin die Verteilung zwischen  $t_2$  und  $t_1$   $Vert(X_{t_2} - X_{t_1}) = Vert(X_{\tau})$  normal, so entspringt die Renditeverteilung  $Vert(X_{t_2}) = Vert(X_{\tau}|X_{t_1}) \circ Vert(X_{t_1})$  für den Gesamtzeitraum bis  $t_2$  der selben Klasse Normalverteilung. Dies basiert auf dem Gesetz, dass die Summe normalverteilter Zufallsvariablen  $X_{t_1}$  und  $X_{t_2} - X_{t_1}$  wieder eine normalverteilte Zufallsvariable  $X_{t_2}$  ist.<sup>13</sup>

Die Klasse dieser Verteilungen wird in der Literatur mit verschiedenen Nuancen in der Definition als Klasse der stabilen Verteilungsfunktionen bezeichnet.<sup>14</sup> Allerdings haben die meisten stabilen Verteilungsfunktionen für eine Zufallsvariable  $Y_t$  keine endlichen Exponentialmomente und damit sind Preise als Funktion der Exponentialmomente der erwarteten Renditen, die in Abschnitt 4.4 benötigt werden, nicht endlich ermittelbar.<sup>15</sup>

<sup>9</sup>Vgl. **Lévy** (1937), S. 74 ff.

<sup>10</sup>Im Sinne einer algebraischen Operation wie etwa in **Berg** beschrieben. Vgl. **Berg** (1972), S. 21 ff.

<sup>11</sup>Vgl. etwa **Rachev/Mittnik** (2000), S. 26 ff.

<sup>12</sup>Vgl. in der Theorie **Samuelson** (1965), S. 43 oder in jüngster Zeit für die Empirie auf dem deutschen Markt **Krämer** (2002), S. 216 ff. Für einen Überblick vgl. **Rachev/Mittnik** (2000), S. 106 ff.

<sup>13</sup>Vgl. **Bosch** (1992), S. 268.

<sup>14</sup>Vgl. **Paul/Baschnagel** (1999), S. 100 ff. oder **Rachev/Mittnik** (2000), S. 26. Aus den stabilen Verteilungsfunktionen lassen sich die stabilen Lévy-Prozesse als Unterklasse der Lévy-Prozesse generieren. Vgl. **Bertoin** (1996), S. 216 f. Für eine Herleitung des Zusammenhangs vgl. **Sato** (1999), S. 83 f.

$$E(\exp(Y_t)) = +\infty.$$

Um weitere Kandidaten mit endlichen Exponentialmomenten zu finden, muss die Klasse der Verteilungsfunktionen ausgedehnt werden. Verlangt man nicht, dass die endlichen Summen der Zufallsvariablen aus der gleichen Klasse der stabilen Verteilungsfunktionen stammen, sondern dass alle, auch unendliche, Aufteilungen einer Zufallsvariablen  $Y_{\tau_1} = Y_{\tau_1/n} + (Y_{2\tau_1/n} - Y_{\tau_1/n}) + \dots + (Y_{\tau_1} - Y_{(n-1)\tau_1/n})$  aus einer bestimmten Klasse stammen, so erhält man die Klasse von Verteilungen der unbegrenzt teilbaren Zufallsvariablen.<sup>16</sup> Für diese Klasse ist umgekehrt jede endliche und unendliche Summe aller Zufallsvariablen aus einer bestimmten Klasse. Dabei verzichtet man auf die Stabilitätsannahme und erreicht dadurch die Existenz zahlreicher Vertreter mit endlichen Exponentialmomenten.<sup>17</sup>

Verteilungen dieser Klasse, welche für sehr kleine Zeiträume existieren, können dann als Randverteilungen eines stochastischen Prozesses angesehen werden.<sup>18</sup> Unter weiteren Einschränkungen, die mit denen des Wiener-Prozesses vergleichbar sind, erhält man einen sogenannten Lévy-Prozess. Um die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen nichtnormalen Lévy-Prozess und Wiener-Prozess deutlich machen zu können, werden die Lévy-Prozesse parallel zum Wiener-Prozess beschrieben. Der eindimensionale<sup>19</sup> Standard-Wiener-Prozess  $X_t$  kann vollständig durch drei Eigenschaften definiert werden:<sup>20</sup>

1. Startwert  $X_0$  ist 0 f.s.,
2. Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse  $X_{t_2} - X_{t_1}$  für  $0 \leq t_1 < t_2$ ,
3. Randverteilung der Zuwächse  $Vert(X_{t_2} - X_{t_1}) = NV(0, t_2 - t_1)$  für  $0 \leq t_1 < t_2$ .

<sup>15</sup>Vgl. **Boyarchenko/Levendorskii** (2002), S. 7 oder ausführlich **Bamberg/Dorffleitner** (2002), S. 870 f. Der Grund dafür liegt in der größeren Wahrscheinlichkeitsmasse an den Verteilungsrändern, die bei der Anpassung an die beobachteten leptokurtischen Aktienrenditeverteilungen entstehen. Sind diese Ränder zu schwer, strebt das evtl. unendlichdimensionale Summenprodukt aus Aktienkurs und Wahrscheinlichkeit gegen unendlich.

<sup>16</sup>Vgl. **Bertoin** (1996), S. 11. Neben dieser Darstellung wird in der Literatur häufig eine Darstellung der Teilbarkeit auf Basis der Faltung verwendet. Vgl. etwa **Boyarchenko/Levendorskii** (2002), S. 46 f. Für die benötigten Zwecke genügt die prozedurale Darstellung.

<sup>17</sup>Vgl. **Sato** (1999), S. 106.

<sup>18</sup>Der mathematische Nachweis dafür findet sich bei **Bauer**. Vgl. **Bauer** (1991), S. 251 f.

<sup>19</sup>Zur Vereinfachung und, da in der Modellwelt von **Black/Scholes** und **Merton** nur ein riskanter Vermögenswert, die Aktie, vorhanden ist, werden nur eindimensionale Prozesse betrachtet. Vgl. **Black/Scholes** (1973), S. 640.

<sup>20</sup>Vgl. etwa **Arnold** (1973), S. 50 f.

Bei dem so definierten Prozess sind fast alle<sup>21</sup> Pfade, die Trajektorien, stetig.<sup>22</sup>

Lévy-Prozesse  $Y_t$  lassen sich charakterisieren durch:<sup>23</sup>

1. Startwert  $Y_0$  ist 0 f.s.,
2. Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse  $Y_{t_2} - Y_{t_1}$  für  $0 \leq t_1 < t_2$ ,
3. Randverteilungen der Zuwächse  $Ver(Y_{t_2} - Y_{t_1})$  sind unbegrenzt teilbar.

Im Vergleich zum Wiener-Prozess wurde die Bedingung 3 erweitert. Statt der exakten Benennung der Verteilung als Normalverteilung, sind hier alle Verteilungen zugelassen, welche die Bedingung aus 3 erfüllen. Beim Wiener-Prozess ist diese Bedingung stets erfüllt, da die Zuwächse  $X_{t_2} - X_{t_1}$  immer weiter untergliedert werden können. Die Teilzuwächse sind  $X_{t_1+(t_2-t_1)/n} - X_{t_1}$  bis  $X_{t_2} - X_{t_1+(t_2-t_1)(n-1)/n}$ , die alle per Definitionem normalverteilt sein müssen, wobei die Hintereinanderausführung der Verteilungen dieser Teilzuwächse die Verteilung von  $X_{t_2} - X_{t_1}$  ergibt.<sup>24</sup> Damit ist der Wiener-Prozess ein Spezialfall der Lévy-Prozesse.<sup>25</sup>

Auch für Lévy-Prozesse lassen sich Eigenschaften für die Trajektorien ableiten. Im Gegensatz zu den fast alle stetigen Pfaden des Wiener-Prozesses sind fast alle Pfade der Lévy-Prozesse nur rechtsseitig stetig. Von der linken Seite jedoch existieren jeweils die Grenzwerte.<sup>26</sup> Das bedeutet, dass die Pfade der Lévy-Prozesse Sprünge enthalten können.

An dieser Stelle erkennt man den Vorteil, den die Eigenschaft 3, die unendliche Teilbarkeit, für alle Lévy-Prozesse und damit auch den Wiener-Prozess

<sup>21</sup>Oder genauer gesagt es existiert eine stetige Modifikation. Vgl. Øksendal (1998), S. 12 ff.

<sup>22</sup>Vgl. Bauer (1991), S. 347 f. Außerdem existieren noch weitere Möglichkeiten Wiener-Prozesse zu definieren. So besteht unter gewissen Voraussetzungen eine Äquivalenzrelation zwischen Wiener-Prozess und Martingalen. Lévy's Charakterisierungssatz. Dass dies für Lévy-Prozesse nicht der Fall ist, wird schwerwiegende Folgen nach sich ziehen. Vgl. Bauer (1991), S. 407.

<sup>23</sup>Vgl. Schoutens (2003), S. 44 f.

<sup>24</sup>Vgl. Paul/Baschnagel (1999), S. 100 f.

<sup>25</sup>Diese Herleitung diene dabei nur zu Demonstrationszwecken. Die Normalverteilung ist bekanntermaßen stabil. Vgl. Bauer (1991), S. 318.

<sup>26</sup>Nimmt man zusätzlich an, dass die Pfade des Prozesses stochastisch stetig ist, können auch Lévy-Prozesse über die Pfadeigenschaften definiert werden. Vgl. Sato (1999), S. 3. Stochastisch stetig heißt dabei:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} P(|Y_{t_2} - Y_{t_1}| > e) = 0 \text{ mit } e > 0, t_2 \geq t_1,$$

vgl. Boyarchenko/Levendorskii (2002), S. 46 f. Das ist äquivalent zur Definition des Wiener-Prozesses in Fußnote 22. Die Trajektorien dieser Prozesse fallen damit unter die Cadlag-Funktionen. Vgl. Jacod/Shiryaev (2003), S. 3.

mit sich bringt. Da miteinander verknüpfte Zufallsvariablen immer aus der Klasse Lévy-Prozesse stammen, lässt sich jede Randverteilung unabhängig vom Zeitpunkt durch eine einzige Verteilungsklasse, die Randverteilungen der Lévy-Prozesse, beschreiben.<sup>27</sup>

## 4.2.2 Randverteilungen

Die Randverteilungsfunktionen der Lévy-Prozesse sind bis auf wenige Ausnahmen, wie etwa die Normalverteilung und die Cauchyverteilung, nicht in geschlossener Form darstellbar. Aber die charakteristische Funktion der Randverteilungen kann stets angegeben werden. Die charakteristische Funktion  $\hat{f}$  einer Verteilung  $f(Y_t)$  und ihrer Zufallsvariablen  $Y_t$  beträgt:<sup>28</sup>

$$\hat{f}(\eta) = E(\exp(i\eta Y_t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\eta Y_t) f(Y_t) dY_t,$$

wobei  $i$  die komplexe Zahl und  $E()$  den Erwartungswertoperator darstellt. Eine charakteristische Funktion ist dabei eine eindeutig zuordenbare Darstellungsweise der Verteilungsfunktion.<sup>29</sup>

Die charakteristische Funktion für die Randverteilungen der Lévy-Prozesse hat darüber hinaus ein ganz spezifisches Aussehen, die Lévy-Chintschin-Formel:<sup>30</sup>

$$\hat{f}(\eta) = \exp(-t\Phi(\eta)) \quad (4.2.1)$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) = & -i\mu_t\eta + \frac{1}{2}\sigma_t^2\eta^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(i\eta Y_t) - 1 - i\eta Y_t \mathbb{I}_{|Y_t| < 1}) P(dY_t) = \quad (4.2.2) \\ & -i\mu_t\eta + \frac{1}{2}\sigma_t^2\eta^2 - E_P(\exp(i\eta Y_t) - 1 - i\eta Y_t \mathbb{I}_{|Y_t| < 1}) \end{aligned}$$

mit  $P$  einem Wahrscheinlichkeitsmaß, für das

$$E_P(\inf(1, Y_t^2)) < \infty$$

<sup>27</sup> Allerdings kann sich der Charakter der Randverteilung im Zeitablauf ändern. So ist es etwa möglich, dass die Randverteilung anfänglich unimodal, später aber bimodal ist. Bei stabilen Lévy-Prozessen kann das nicht auftreten. Vgl. **Sato** (1999), S. 145 ff.

<sup>28</sup> Vgl. **Bosch** (1992), S. 292.

<sup>29</sup> Darüberhinaus ist die charakteristische Funktion zweier gefalteter Verteilungsfunktionen zweier unabhängiger Zufallsvariablen das Produkt der beiden charakteristischen Funktionen. Vgl. **Bauer** (1991), S. 190. Das ist genau die Eigenschaft die man benötigt, um die Klasse der so verknüpften Verteilungen zu definieren.

<sup>30</sup> Vgl. **Boyarchenko/Levendorskii** (2002), S. 47 und **Bertoin** (1996), S. 13. Eine ausführliche Herleitung findet sich bei **Sato** (1999), S. 37 f. und S. 44 f. i.V.m. S. 35.

gelten muss. Am Einfluss des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  erkennt man, dass die Exponenten endlich werden, und die charakteristische Funktion damit existiert. Durch Subtraktion des letzten Terms im Erwartungswert der Gleichung (4.2.2), der den Erwartungswert der vielen kleinen Sprünge  $|Y_t| < 1$  darstellt, wird der Term soweit vermindert, bis der ganze Ausdruck  $\Phi(\eta)$  endlich bleibt.<sup>31</sup>

$\Phi(\eta)$  aus Gleichung (4.2.2) wird auch als Lévy-Exponent bezeichnet. Er beinhaltet die zentralen Eigenschaften des Lévy-Prozesses. Der Ausdruck  $\mu_t$  reflektiert den Drift,  $\sigma_t^2$  die Varianz und  $P$  das Sprungverhalten des Prozesses. Die ersten beiden Exponenten stammen aus der charakteristischen Funktion der Klasse Normalverteilungen  $NV(\mu_t, \sigma_t)$ . Im Exponentialausdruck  $\exp(i\eta Y_t) - 1$  erkennt man einen Teil des Exponenten der charakteristischen Funktion der Poissonverteilung, die als Randverteilung des Poisson-Prozesses entsteht.<sup>32</sup> Alle drei Ausdrücke  $(\mu_t, \sigma_t^2, P)$  zusammen werden auch als Lévy-Tripel bezeichnet.

Beim Standard-Wiener-Prozess, beginnend zum Zeitpunkt 0, ist nur der zweite Term  $\frac{1}{2}\sigma^2\eta^2$  verschieden von Null und beträgt  $\frac{1}{2}(t-0)^2\eta^2$ . Die beiden anderen Terme verschwinden. Einen driftlosen<sup>33</sup> Poisson-Prozess mit Sprungintensität  $\lambda$  und Sprunghöhe 1 beschreibt das Lévy-Tripel  $(0, 0, \lambda\Delta(1))$ , wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß die Diracsche Deltafunktion  $\Delta(1)$  darstellt. Der Lévy-Exponent bzw. die zugeordnete charakteristische Funktion  $\exp(\lambda \exp(i\eta Y_t) - 1)$  entspricht hier genau der charakteristischen Funktion der Poissonverteilung. Man erkennt somit, dass der Sprungdiffusionsprozess, den *Merton* als Renditeprozess für Aktien eingeführt hat,<sup>34</sup> als Kombination von Wiener- und bewertetem<sup>35</sup> Poisson-Prozess ebenso einen Lévy-Prozess mit Lévy-Tripel  $(\mu_t, \sigma_t^2, \lambda P(dY))$  darstellt, wobei gegenüber dem einfachen Poisson-Prozess eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$  für das Sprungverhalten, die Höhe des Sprungs, unterstellt wird. Diese kann etwa eine Normalverteilung  $NV(0, \sigma_t)$  sein, so dass sich die Sprungkomponente des Lévy-Exponenten zu  $\lambda(\exp(-\frac{1}{2}\sigma_t^2\eta^2) - 1)$  ergibt. Der von *Merton* verwendete Sprungdiffusionsprozess wird im Folgenden noch häufiger als Beispiel dienen. Für die nachfolgenden Ausführungen wird es sich

<sup>31</sup>Ein Beweis der Endlichkeit dieser Form von Exponentialmomenten findet sich bei **Sato** (1999), S. 165 f.

<sup>32</sup>Zum Poisson-Prozess vgl. **Fahrmeir et al.** (1981), S. 82 und zur charakteristischen Funktion der Poissonverteilung vgl. **Bosch** (1992), S. 188.

<sup>33</sup>Der Drift kann immer durch geeignete Operationen auf Null reduziert werden. Vgl. auch Abschnitt 4.2.3.

<sup>34</sup>Vgl. **Merton** (1976), S. 127 f.

<sup>35</sup>Der Poisson-Prozess in seinem ursprünglichen Sinne ist isoton. Vgl. **Bauer** (1991), S. 358. Für Kursbewegungen kommen aber auch negative Sprünge in Frage. Dazu genügt es einfach einen zweiten Poisson-Prozess vom ersten abzuziehen, und man erhält den gewünschten Renditeprozess, als bewerteten Poisson-Prozess. Zum bewerteten Poisson-Prozess vgl. etwa **Fahrmeir et al.** (1981), S. 92.

ohne Verlust an Erklärungsgehalt als ausreichend erweisen, statt eines bewerteten Poisson-Prozess einen einfachen im Rahmen des Sprungdiffusionsprozess zu verwenden.

### 4.2.3 Stochastische Differentialgleichungen

In manchen Fällen ist neben der Darstellung des Lévy-Prozesses auf Basis wahrscheinlichkeitstheoretischer Elemente aus Abschnitt 4.2.1 eine analytische Definition, wie beim Wiener-Prozess hilfreich. Lévy-Prozesse sind Semimartingale. Damit lässt sich eine stochastische Differentialgleichung für eine Zufallsvariable, bspw. den Aktienkurs,  $S_t$  herleiten:<sup>36</sup>

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu_t S_{t-} + \sigma_t S_{t-} \frac{dW_t}{dt} + \frac{d\kappa_t}{dt} S_{t-}, \quad (4.2.3)$$

wobei  $\mu_t$  und  $\sigma_t$  die Komponenten des Diffusionsprozesses darstellen und  $\kappa_t$ , die Sprungkomponente repräsentiert,<sup>37</sup> die dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  folgt und mit Poissonverteilung auftritt.<sup>38</sup> Mit  $\frac{dW_t}{dt}$  wird die „Ableitung“ des Standard-Wiener-Prozesses nach der Zeit, ein Weißes Rauschen, bezeichnet.<sup>39</sup> Die stochastische Differentialgleichung enthält somit erstens einen deterministischen Prozess, den Drift. Zweitens findet sich ein Martingal für den Renditeprozess, der Wiener-Prozess und drittens unabhängig davon ein Semimartingal, der Sprungprozess.<sup>40</sup> Das letzte Semimartingal lässt sich nochmals zerlegen in einen deterministischen Prozess und ein Martingal  $M_t$ :<sup>41</sup>

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu_t S_{t-} + \sigma_t S_{t-} \frac{dW_t}{dt} + m_{2t} S_{t-} + S_{t-} \frac{dM_t}{dt}. \quad (4.2.4)$$

Für das Lévy-Tripel  $(\mu_t, \sigma_t^2, P)$  lässt sich der Drift zusammenfassen zu  $m_t = \mu_t + m_{2t}$ . Für das Beispiel des einfachen Poisson-Prozesses mit deterministischen Sprüngen und Drift  $\mu_t$  lässt sich Gleichung (4.2.3) schreiben

<sup>36</sup>Vgl. **Bühlmann et al.** (1996), S. 302. Daneben sind noch weitere Darstellungsformen möglich. Vgl. **Nualart/Schoutens** (2001), S. 764 f. oder die Herleitung mit Hilfe des Pseudodifferentialoperators. Vgl. **Jacob** (1996), S. 31 und zur Anwendung im Finanzierungsbereich **Boyarchenko/Levendorskii** (2001), S. 124 f.

<sup>37</sup>Die „Ableitung“ der Sprungkomponente nach der Zeit  $\frac{d\kappa_t}{dt}$  wird als Poissonmaß bezeichnet. Vgl. **Jacod/Shiryaev** (2003), S. 70 ff.

<sup>38</sup>Siehe zur Entwicklung dieser Darstellungsform **Jacod/Shiryaev** (2003), S. 57. Da von links nur der Grenzwert vorhanden ist, symbolisiert das Minus, dass die Zeitentwicklung nur rechtsseitig betrachtet wird.

<sup>39</sup>Da die „Ableitung“ im strengen Sinne nicht existiert, wird hier  $\frac{dW_t}{dt}$  als ganzes Objekt betrachtet.

<sup>40</sup>Hat die Sprungkomponente des Prozesses beschränkte Variation, kann der Prozess stets als bewerteter Poisson-Prozess dargestellt werden. Vgl. **Bertoin** (1996), S. 15 ff.

<sup>41</sup>Vgl. **Chan** (1999), S. 508.



als<sup>42</sup>

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu_1 S_{t-} + \sigma S_{t-} \frac{dW_t}{dt} + \mathbb{I}_\kappa(\kappa) S_{t-},$$

wobei  $\lambda$  die Sprungintensität für das Auftreten eines Sprungs der Höhe  $\kappa$  darstellen.  $\mathbb{I}_\kappa$  ist der Indikator für das Auftreten eines Sprunges. Zerlegt man die Sprungkomponente wie oben in ein Martingal und in einen deterministischen Prozess  $m_{2t} = \lambda(\exp(\kappa) - 1)$ , und spaltet vom Wiener-Prozess  $m_{1t} = -\frac{1}{2}\sigma^2$  ab, erhält man insgesamt als deterministischen Prozess:

$$m_t = \mu_t + m_{1t} + m_{2t} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda(\exp(\kappa) - 1).$$

Für die bekannte geometrische Brownsche Bewegung, die keine Sprungkomponente enthält, hat Gleichung (4.2.3) sich in

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu S_t + \sigma S_t \frac{dW_t}{dt}.$$

vereinfacht. Sowohl die wahrscheinlichkeitstheoretische aus Gleichung (4.2.1) als auch die analytische Form der Darstellung von Lévy-Prozessen aus Gleichung (4.2.3) werden sich im Folgenden als nützlich erweisen.<sup>43</sup>

#### 4.2.4 Approximation von Aktienrenditeprozessen

Im Weiteren soll nun der Vergleich gezogen werden, ob Lévy-Prozesse das Verhalten von Aktienrenditen besser beschreiben können, als der Wiener-Prozess. Dies wird ausschließlich an Hand der Randverteilungen durchgeführt, weil die Eigenschaft der Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse bei beiden jeweils definierende Eigenschaft ist.<sup>44</sup> Dazu wurden zunächst die logarithmierten Daxrenditen des Zeitraums 1980-2000 auf täglicher Basis auf Normalverteilung getestet. Die Daten stammen dabei von einer Untersuchung aus dem Jahr 2002.<sup>45</sup> Verwendet wurde der Jarque-Bera- und der Kolmogorow-Smirnow-Test.<sup>46</sup>

<sup>42</sup>Vgl. für den bewerteten Poisson-Prozess **Bühlmann et al.** (1996), S. 301. oder auch zur Darstellungform **Leon et al.** (2002), S. 204 ff.

<sup>43</sup>Daneben kann mit Hilfe des Pseudodifferentialoperators auch eine Pseudo-Fokker-Planck-Gleichung, vgl. zur Fokker-Planck-Gleichung etwa **Paul/Baschnagel** (1999), S. 35 ff., hergeleitet werden:

$$Df(Y_t, t|Y_{t_0}, t_0) = -\frac{\partial}{\partial Y_t} [S_1(Y_t)f(Y_t, t|Y_{t_0}, t_0)] + \frac{\partial^2}{\partial Y_t^2} [S_2(Y_t)f(Y_t, t|Y_{t_0}, t_0)],$$

wobei  $D$  den Pseudodifferentialoperator darstellt. Vgl. **Jacob** (1996), S. 21 ff.

<sup>44</sup>Vgl. Abschnitt 4.2.1.

<sup>45</sup>Vgl. **Steiner et al.** (2002), S. 73 f.

Daxrenditen	
Mittelwert	0,000406
Varianz	0.000153
Schiefte	-0,681
Kurtosis	7,84
Jarque-Bera-Test	14.447 > 9,21
Kolmogorow-Smirnow-Test (1%)	0,559 > 0,02

Tabelle 4.1: *Normalverteilungstests für Aktienrenditen*

Wie Tabelle 4.1 zeigt, ergaben beide Tests, dass die Normalverteilungshypothese auf einem Konfidenzniveau von 1% abzulehnen ist. Danach wurde überprüft, ob andere Randverteilungen der Lévy-Prozesse besser geeignet sind die Verteilung abzubilden. Es wurden verschiedene typische Verteilungen als Randverteilungen aus der Klasse der Lévy-Prozesse getestet, ob sie die Verteilung der Daxrenditen besser abbilden können.<sup>47</sup> Die Approximation fand auf Basis einer Minimierung der  $\mathcal{L}^2$ -Norm statt.<sup>48</sup>

Man erkennt, dass die Prozesse insbesondere das Randverhalten der empirischen Verteilung deutlich besser abbilden als der Wiener-Prozess. Besonders deutlich wird dies, wenn man die letzte Spalte betrachtet. Aber

<sup>46</sup>Vgl. zum Jarque-Bera-Test **Jarque/Bera** (1987), S. 165 f. und zum Kolmogorow-Smirnow-Test etwa **Bosch** (1992), S. 382 f. Insbesondere ersterer wurde für die Pearson-Familie von Statistiken entwickelt, zu der zahlreiche Mitglieder der später behandelten Randverteilungen der Lévy-Prozesse gehören. Zu Eigenschaften der Tests vgl. **Ruwe** (2002), S. 3 ff.

<sup>47</sup>Einen Überblick über die charakteristischen Funktionen dieser Verteilungen bietet Anhang C.1.

<sup>48</sup>Zur Vorgehensweise vgl. etwa den Überblick bei **Matacz** (1997), S. 148 ff. Daneben wurden auch andere Schätzer, wie der GMM-Schätzer untersucht, die zwar leichter implementierbar sind, aber weniger Erfolg versprochen. Vgl. etwa **Campbell et al.** (1997), S. 532 ff. Die Approximationen wurden in Maple, die Graphiken in Excel erstellt.

Prozess	d-Statistik	5 Sigma	4 Sigma	3 Sigma	Kurtosis
Daxrenditen		0,201%	0,384%	0,620 %	7,84
Wiener-Prozess	0,559	0,00%	0,00%	0,073%	3,00
Normal Inverser Gauss-Prozess	0,0109	2,09%	4,11%	2,88 %	12,1
Varianz Gamma-Prozess	0,0140	1,22%	4,95%	3,93 %	27,6
Hyperbolischer Prozess	0,0109	0,239%	0,615%	1,89 %	10,66
Mixed Meixner-Prozess	0,085	0,205%	0,531%	1,92 %	9,88

Tabelle 4.2: *Eignung von Lévy-Prozessen zur Approximation*

auch das Bestimmtheitsmaß ist bei allen Prozessen größer als beim Wiener-Prozess. Besonders erfolgversprechend scheint die Approximation der Verteilung durch den Mixed Meixner-Prozess<sup>49</sup> zu sein, der keine Diffusionskomponente enthält, sondern einen reinen Sprungprozess darstellt.<sup>50</sup> Deswegen Randverteilung ist zum graphischen Vergleich nochmals in Abbildung 4.1 dargestellt:

<sup>49</sup>Die Bezeichnungen der Prozesse sind hier nicht immer eindeutig. Vgl. Kallsen (1998), S. 42.

<sup>50</sup>Auf den durch vier Parameter determinierte generalisierten Hyperbolischen Prozess wurde verzichtet.

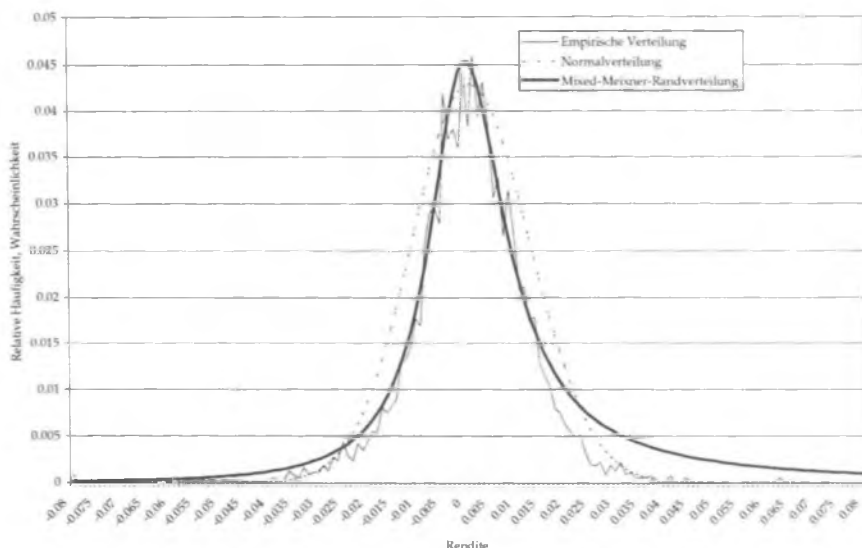


Abbildung 4.1: An die Darrenditen kalibrierter Mixed Meixner-Prozess

Gegenüber der Normalverteilung erkennt man nicht nur eine bessere Anpassung an den Verteilungsenden, sondern auch eine bessere Anpassung im Bereich der Verteilungsmitte. Nachdem eine bessere Anpassung der Renditen durch die Lévy-Prozesse, insbesondere durch den Mixed Meixner-Prozess, möglich ist, werden nun im zweiten Schritt Überlegungen angestellt, inwieweit diese zur Bewertung von Optionen verwendet werden können.

## 4.3 Äquivalentes Martingalmaß

### 4.3.1 Unvollständigkeit

Im Fall der Normalverteilung der Modellwelt von *Black/Scholes* und *Merton* kann das äquivalente Martingalmaß eindeutig aus der Martingalgleichung für den Aktienkurs  $S_t$  und der stetigen Verzinsung  $r$  für die risikolose Anlagemöglichkeit bestimmt werden.<sup>51</sup> Aus der Martingalgleichung<sup>52</sup>

<sup>51</sup>Vgl. auch dazu Abschnitt 3.3.2.

<sup>52</sup>Die Prüfung der Anwendungsvoraussetzungen kann hier unterbleiben, da der Markt sich nicht als vollständig erweisen wird und somit eine Bewertung rein auf Basis des Arbitragefreiheitsgedankens nicht möglich ist.

$$E_Q(S_0 \exp(X_t)) = S_0 \exp(rt)$$

oder eingesetzt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_0 \exp(X_t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{(X_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) dX_t = S_0 \exp(rt)$$

ergibt sich hier ein veränderter Drift von<sup>53</sup>

$$\hat{\mu}_t = -\frac{1}{2}\sigma_t^2 + rt. \quad (4.3.1)$$

Im Falle von Lévy-Prozessen ist diese eindeutige Ableitung im Allgemeinen nicht möglich, da Lévy's Charakterisierungstheorem für Wiener-Prozesse nicht greift. Es können verschiedene Parameter des Prozesses verändert werden, wobei der Lévy-Prozess immer noch ein Lévy-Prozess bleibt, also immer noch eine charakteristische Funktion in Form der Lévy-Chintschin-Formel beibehält.<sup>54</sup> Ferner ist eine Veränderung auf einen Prozess denkbar, der kein Lévy-Prozess ist, bspw. einen Prozess der nicht der Annahme der Stationarität und Unabhängigkeit der Zuwächse genügt. Gerade diese Annahme sollte aber aus ökonomischer Sicht bestehen bleiben, so dass im Folgenden ein Maßwechsel auf einen Lévy-Prozess erfolgt. Die Veränderung kann weiterhin der Art durchgeführt werden, dass der Prozess ein Martingal wird.<sup>55</sup>

Wählt man beispielsweise als Renditeprozess die einfachste Version des angesprochenen Sprungdiffusionsprozesses mit  $(\mu, \sigma^2, \lambda \Delta(\kappa))$  als Lévy-Tripel, kann man ein Martingal für den diskontierten Preisprozess sowohl dadurch generieren, dass man eine Anpassung des Drifterms der Diffusionskomponente  $\mu$ , eine Anpassung der Intensitätsrate  $\lambda$  oder Kombinationen aus beiden vornimmt, was an Hand der stochastischen Differentialgleichung des Lévy-Prozesses in der Martingaldarstellung (4.2.4) leicht erkennbar ist:<sup>56</sup>

$$\frac{dS_t}{dt} = m_t S_{t-} + \sigma S_{t-} \frac{dW_t}{dt} + M_t.$$

Ein mögliches Ergebnis kann sogar unter Nullsetzen der Sprungkomponente erfolgen. Die Randverteilungen eines solchen Prozesses genügen immer noch der Lévy-Chintschin-Formel und der Prozess ist damit ein Lévy-Prozess.<sup>57</sup>

<sup>53</sup>Vgl. Øksendal (1998), S. 274 f.

<sup>54</sup>Zu beachten ist allerdings, dass der Maßwechsel auf ein äquivalentes Maß hin erfolgen muss. Daraus ergeben sich gewisse Einschränkungen für die Lévy-Chintschin-Formel des neuen Prozesses. Vgl. Sato (1999), S. 217 ff.

<sup>55</sup>Vgl. etwa Keller (1997), S. 24 f.

<sup>56</sup>Vgl. dazu auch Merton (1976), S. 129. Die Sprung- und Diffusionskomponente sind auch hier unabhängig.

<sup>57</sup>Vgl. Bertoin (1996), S. 13.

Verzichtet man auf die Sprungkomponente mit  $\lambda = 0$  in der Lösung, erhält man das Ergebnis aus Gleichung (4.3.1) mit modifiziertem Drift

$$\hat{\mu}_t = -\frac{1}{2}\sigma_t^2 + rt.$$

Bleibt die Sprungkomponente und Diffusionskomponente unverändert, kann die Lösung analog zur Lösung von *Cox/Ross* mit einer Diffusionskomponente bestimmt werden.<sup>58</sup> Es ergibt sich

$$\hat{\mu}_t = rt - \frac{1}{2}\sigma_t^2 - \lambda(\exp(\kappa) - 1)t.$$

Damit erkennt man, dass in diesen Fall, wie bei den meisten Lévy-Prozessen, mehrere äquivalente Maße zulässig sind, und der Markt in der Modellwelt i. A. unvollständig ist.<sup>59</sup>

Um zu einem eindeutigen Martingalmaß und damit eindeutigen Preis für ein Derivat zu gelangen, existieren zwei Möglichkeiten. Zum Einen kann der Markt durch Hinzunahme weiterer Vermögenswerte vervollständigt werden. So wird in der Literatur vorgeschlagen, den Lévy-Prozess durch Diffusions- und Sprungsprozesse zu approximieren, die jeweils durch einzelne Vermögenswerte abgebildet werden.<sup>60</sup> Zum Anderen können zusätzliche Annahmen bzgl. des neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes und damit des Preisfunctionals getroffen werden.<sup>61</sup> Diese Variante wird im Folgenden verwendet.

### 4.3.2 Esscher-Transformation als Eindeutigkeitskriterium

Bei der Esscher-Transformation<sup>62</sup> wird die funktionale Form der Radon-Nikodym-Ableitung zwischen Maßen  $Q$  und  $P$  festgelegt,<sup>63</sup> so dass sie nur von dem Zustand der Variablen im Zeitpunkt  $t$  abhängt:

<sup>58</sup>Vgl. *Cox/Ross* (1976), S. 157. Vgl. hierzu auch *Gerber/Shiu* (1994a), S. 108 f.

<sup>59</sup>Erinnert sei an dieser Stelle, dass das Sprungdiffusionsmodell von *Merton* ebenso unvollständig ist. Vgl. *Merton* (1976), S. 131.

<sup>60</sup>Vgl. *Leon et al.* (2002), S. 218 ff. *Mertons* Verfahrensweise den Sprungdiffusionsprozess in zwei Komponenten zu zerlegen und nur die Diffusionskomponente als bewertungsrelevant zu deklarieren, passt in diesen Kontext. Vgl. *Merton* (1976), S. 133.

<sup>61</sup>*Eberlein/Jacod* haben sogar nachgewiesen, dass in diesem Falle die verschiedenen Martingalmaße so bestimmt werden können, dass sich als Ergebnis eine große Spannweite von möglichen Optionspreisen ergibt. Vgl. *Eberlein/Jacod* (1997), S. 134. Für europäische Optionen entspricht diese Spannweite der Spannweite von Optionspreisen, die man unter Arbitragefreiheit ohne Verteilungsannahmen ableiten kann,  $S_0$  bis  $(S_0 - B)^+$ . Vgl. *Merton* (1973), S. 144 ff.

<sup>62</sup>Die Esscher-Transformation wurde von ihrem Namensgeber *Fredrik Esscher* 1932 vorgestellt. Vgl. *Esscher* (1932), S. 178 ff.

$$\frac{dQ_t}{dP_t} = \exp(\theta Y_t - c(\theta, t)), \quad (4.3.2)$$

wobei  $\theta$  und  $c(\theta, t)$  Konstanten darstellen.<sup>64</sup> Die Martingalgleichung lässt sich unter Einbeziehung der Radon-Nikodym-Ableitung umschreiben:<sup>65</sup>

$$S_0 = \exp(-rt) E_Q(S_0 \exp(Y_t)) = \exp(-rt) E_P \left( S_0 \exp(Y_t) \frac{dQ_t}{dP_t} \right) = \quad (4.3.3)$$

$$S_0 E_P(\exp((1 + \theta)Y_t - c(\theta, t) - rt)).$$

Der erste Exponent des letzten Terms kann als Resultat einer charakteristischen Funktion

$$E_P(\exp(\iota(-\iota)(1 + \theta)Y_t))$$

zur Variablen  $-\iota(1 + \theta)$  interpretiert werden, deren Lösung unter Zuhilfenahme des Lévy-Exponenten  $\Phi_P(-\iota(1 + \theta))$  als

$$\exp(-t\Phi_P(-\iota(1 + \theta)) - c(\theta, t) - rt) = 1 \quad (4.3.4)$$

geschrieben wird. Unter Verzicht von  $\exp(Y_t)$  ergibt sich für den risikolosen Vermögenswert die Gleichung

$$\exp(-t\Phi_P(-\iota\theta) - c(\theta, t)) = 1. \quad (4.3.5)$$

Man erkennt an dieser Stelle auch die Bedeutung von  $c(\theta, t)$  als Normierungsexponent, der dafür sorgt, dass das neue Maß wiederum ein auf Eins normiertes Maß, ein Wahrscheinlichkeitsmaß, ist.  $c(\theta, t) = -t\Phi_P(-\iota\theta)$  in Gleichung (4.3.4) eingesetzt erhält man

$$-\Phi_P(-\iota(1 + \theta)) + \Phi_P(-\iota\theta) - r = 0. \quad (4.3.6)$$

Allerdings existiert  $\theta$  nicht für jedes  $\Phi_P()$  der Gleichung (4.3.6). Betrachtet man Gleichung (4.2.2) mit eingesetztem  $\theta$ , stellt man fest, dass die gesuchte

<sup>63</sup>Daneben wird die Esscher-Transformation auch als Verhältnis der Dichtefunktionen  $f_Q(Y_t, t, \theta)$  und  $f_P(Y_t, t)$

$$f_Q(Y_t, t, \theta) = \frac{\exp(\theta Y_t)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\theta Y_t) f_P(Y_t, t) dY(t)} f_P(Y_t, t) = \frac{\exp(\theta Y_t)}{\exp(c(\theta, t))} f_P(Y_t, t)$$

in der Literatur beschrieben. Vgl. etwa **Raible** (2000), S. 5. oder **Gerber/Shiu** (1994a), S. 102 f. Da in Abschnitt 4.2.2 festgestellt wurde, dass nicht immer eine Dichtefunktion vorhanden ist, wird im Folgenden auf die Darstellung in Form der Radon-Nikodym-Ableitung zurückgegriffen. Eine Äquivalenz ergibt sich für die sogenannte generalisierte Esscher-Transformation. Vgl. **Kallsen/Shiryaev** (2002), S. 420 ff.

<sup>64</sup>Vgl. für ähnliche Herleitungen hier und im Folgenden etwa **Schoutens** (2003), S. 77 ff. oder **Boyarchenko/Levendorskii** (2002), S. 98 ff.

<sup>65</sup>Auf die Zeitabhängigkeit der Maße kann o.B.d.A. verzichtet werden.

Variable  $\theta$  sowohl zum Quadrat als auch im Exponenten auftritt. Die Auflösbarkeit der Gleichung (4.3.6) nach  $\theta$  ist somit nicht automatisch gegeben. Es lassen sich aber notwendige und hinreichende Bedingungen ableiten, unter denen die Auflösbarkeit stets gegeben ist.<sup>66</sup>

Setzt man das Resultat für  $c(\theta, t)$  in Gleichung (4.3.2) ein, multipliziert die Gleichung mit  $\exp(\iota Y_t \eta)$  und integriert beide Seiten, erhält man<sup>67</sup>

$$\int \exp(\iota Y_t \eta) dQ = \exp(\iota \Phi_P(-\theta)) \int \exp((\iota \eta - \iota^2 \theta) Y_t) dP.$$

Für den Lévy-Exponenten unter  $Q$  ergibt sich folgender Zusammenhang zum Lévy-Exponenten unter  $P$

$$\Phi_Q(\eta) = \Phi_P(\eta - \iota \theta) - \Phi_P(-\iota \theta). \quad (4.3.7)$$

Zur Demonstration der Wirkweise der Esscher-Transformation wird im Folgenden angenommen, dass die Aktienrenditen einem Wiener-Prozess folgen.<sup>68</sup> Für den Wiener-Prozess mit Varianz  $\sigma^2$  und erweitert um einen Drift  $\mu$  ergibt sich für die Aktienkurse ein neuer Drift von  $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  und damit als Lévy-Exponent

$$\Phi_P(\eta) = -\iota(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\eta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2.$$

Setzt man diesen Lévy-Exponenten in Gleichung (4.3.6) ein, erhält man

$$(1 + \theta)\mu - (1 + \theta)\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2(1 + \theta)^2 - \mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 - r = 0.$$

Für  $\theta$  erhält man aus dieser Gleichung

$$\theta = \frac{-\mu + r}{\sigma^2}. \quad (4.3.8)$$

Setzt man nun dieses  $\theta$  in die Transformationsformel für den Lévy-Exponenten (4.3.7) ein,<sup>69</sup> so erhält man

$$\Phi_Q(\eta) = -\iota(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\eta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2, \quad (4.3.9)$$

was dem Lévy-Exponenten zur Normalverteilung mit Erwartungswert  $r - \frac{1}{2}\sigma^2$  und Varianz  $\sigma^2$  und damit (4.3.1) entspricht.<sup>70</sup> Dieses Resultat ist identisch zum Ergebnis in der Modellwelt von *Black/Scholes* und *Merton*.

<sup>66</sup>Vgl. **Boyarchenko/Levendorskii** (2002), S. 99 f.

<sup>67</sup>Mathematische Details der Herleitung finden sich im Anhang C.2.

<sup>68</sup>Man beachte, dass in zahlreichen Beispielen, wie etwa bei *Boyarchenko/Levendorskii*, der Aktienkursprozess, nicht der Renditeprozess, einem Lévy-Prozess folgt. Vgl. **Boyarchenko/Levendorskii** (2002), S. 99.

<sup>69</sup>Weitere mathematische Details dazu finden sich im Anhang C.2.

<sup>70</sup>Ein Ergebnis für das Cox-Ross-Modell findet sich bei **Gerber/Shiu** (1994a), S. 108 f.



### 4.3.3 Eignung der Esscher-Transformation

Die Esscher-Transformation wurde entwickelt, um eine einzelne Wahrscheinlichkeitsverteilung, wie etwa eine Verlustverteilung so zu transformieren, dass der Mittelwert der transformierten Verteilung einen vorgegebenen Zielwert annimmt.<sup>71</sup> Diese wird nun eingesetzt, um einen gesamten stochastischen Prozess zu transformieren. Die Anwendung ist möglich, wenn durch eine einzelne Randverteilung der Charakter des Prozesses determiniert werden kann. Bei den vorliegenden Lévy-Prozessen ist exakt dies der Fall, wie Eigenschaft 3 in Abschnitt 4.2.1 festlegt.<sup>72</sup>

Des Weiteren setzt die Esscher-Transformation an der bei Lévy-Prozessen definierenden charakteristischen Funktion der Verteilungsfunktion an. Sie verändert nur die Parameter dieser charakteristischen Funktion. Die Form, die Lévy-Chintschin-Darstellung, und damit die definierende Eigenschaft der Lévy-Prozesse bleibt aber erhalten.<sup>73</sup> Bei der Transformation ist die Diffusionskomponente stets unberührt, wie man aus (4.3.9) erkennen kann, was zur Konsistenz mit der Welt von *Black, Scholes* und *Merton* und zur Äquivalenz der Maße führt.<sup>74</sup>

Mathematisch stellt die Esscher-Transformation somit ein geeignetes Mittel dar, Lévy-Prozesse zu transformieren. Ökonomisch beinhaltet sie die Auswahl eines spezifischen Wahrscheinlichkeitsmaßes auf einem unvollständigen Markt. Dies impliziert die Festlegung einer Gewichtung  $Q$  zukünftiger Preise aufbauend auf einer gegebenen Verteilungsfunktion  $P$ , also die Bestimmung eines Preisfunktionalen über den Nutzen künftiger Zustände, eine Präferenzfunktion. Dies ist besonders gut am Exponenten des letzten Ausdrucks der Gleichung (4.3.3)

$$(1 + \theta)Y_t - c(\theta, t) - rt$$

zu erkennen. Das genaue Aussehen einer dazu passenden Nutzenfunktion in Abhängigkeit von Konsumvorstellungen  $Co$ , Risikoaversionskoeffizienten  $\epsilon$  und Zeitpräferenz  $\xi$  lässt sich weiterhin auch bestimmen als

$$U(Co, t) = \exp(-\xi t) \frac{Co^\epsilon}{\epsilon}.$$

Dies ist eine stetig differenzierbare, konkave und in der ersten Ableitung nach  $Co$  echt monoton wachsende Nutzenfunktion. Verschiedene Autoren haben aufeinander aufbauend gezeigt, dass die Bestimmung einer neuen Wahrscheinlichkeitsfunktion  $Q$  über die Esscher-Transformation konsistent

<sup>71</sup>Vgl. **Esscher** (1932), S. 175 und S. 178.

<sup>72</sup>Zur Diskussion vgl. etwa **Raible** (2000), S. 6.

<sup>73</sup>Vgl. dazu und zu den Voraussetzungen **Fujiwara/Miyahara** (2003), S. 516.

<sup>74</sup>Vgl. **Sato** (1999), S. 217 ff.

ist mit der Preisbestimmung über die Maximierung des Nutzens einer solchen Nutzenfunktion.<sup>75</sup>

Eine wünschenswerte Eigenschaft auf einem unvollständigen Markt wäre, wenn der Preis des nicht duplizierbaren Wertpapiers dem Preis einer Handelsstrategie entspricht, die risikominimierend die Auszahlungen des Wertpapiers nachbildet. Diese risikominimierende Handelsstrategie kann durch die Bestimmung eines sog. minimalen Markes erreicht werden. Mit gewissen Einschränkungen, wie etwa dass der Nachbilder eine varianzminimale Strategie bevorzugt und damit ebenso eine bestimmte Nutzenfunktion aufweist,<sup>76</sup> ist dies die Minimierung der relativen Entropie<sup>77</sup>

$$H(Q|P) = \int \ln \frac{dQ}{dP} dQ$$

zwischen dem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  und dem minimalen Maß  $Q$ .<sup>78</sup> Das Auffinden eines Markes über die Entropieminimierung ist dabei unter gewissen Umständen gleichbedeutend mit der Markstransformation nach *Esscher*.<sup>79</sup> Damit erweist sich die Esscher-Transformation als geeignet, um die Randverteilungen der Prozesse im Hinblick auf eine spätere Bewertung zu transformieren.

#### 4.3.4 Esscher-Transformationen für ausgewählte Aktienkursprozesse

Im Folgenden wird an Hand von zwei beispielhaften nichtnormalen Lévy-Prozessen die Esscher-Transformation ausgeführt. Die beiden eingesetzten Lévy-Prozesse werden dabei so gewählt, dass sie zum Einen die beiden in der Literaturmeinung häufig vertretenen Konstruktionsmethoden der Prozesse repräsentieren.<sup>80</sup> Zum Anderen werden aus diesen Unterklassen Prozesse ausgewählt, die in einem ausgewogenen Verhältnis von mathematischer Komplexität und Anschaulichkeit für die Demonstration der Esscher-Transformation stehen. Daneben sei angemerkt, dass der ausgewählte Mixed Meixner-Prozess bei der empirischen Überprüfung in Abschnitt 4.2.4 besonders gute Resultate erzielt hat. Für die gewählten Prozesse ergeben sich folgende Esscher-Transformationen:

<sup>75</sup>Vgl. **Gerber/Shiu** (1994b), S. 175 f. und unter **CRRA Naik/Lee** (1990), S. 500 i.V.m. **Madan/Milne** (1991), S. 46 ff. Eine Gesamtdarstellung bietet **Keller**. Vgl. **Keller** (1997), S. 38 ff.

<sup>76</sup>Vgl. **Goll/Rüschendorf** (2001), S. 564 ff.

<sup>77</sup>Zur Entropie vgl. etwa **Golan et al.** (1996).

<sup>78</sup>Vgl. **Föllmer/Schweizer** (1991), S. 401 ff.

<sup>79</sup>Vgl. i. T. **Chan** (1999), S. 519 ff. oder auch **Fujiwara/Miyahara** (2003), S. 516. i.V.m. S. 520 f.

<sup>80</sup>Vgl. etwa **Schoutens** (2003), S. 177 ff.

## 1. Normal Inverser Gauss-Prozess

besitzt die charakteristische Funktion

$\exp(-t\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \eta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}))$ , wobei die Darstellung als Lévy-Tripel nicht zielführend ist, da die charakteristische Funktion bereits in Exponentialform vorliegt.<sup>81</sup> Setzt man diese in Gleichung (4.3.6) ein, erhält man direkt eine implizite Darstellung für  $\theta$  der Esscher-Transformation zu:<sup>82</sup>

$$r = \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta + 1)^2}).$$

Der neue Prozess ist damit ein Normal Inverser Gauss-Prozess mit modifizierter Randverteilung durch ein modifiziertes  $\beta_n$ :

$$\beta_n = \beta + \theta.$$

## 2. Mixed Meixner-Prozess

besitzt die charakteristische Funktion  $\left(\frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cosh(\frac{\alpha\eta - i\beta}{2})}\right)^{2\delta}$ . Das  $\theta$  der Esscher-Transformation ergibt sich hier zu:<sup>83</sup>

$$\theta = -\frac{1}{\alpha} \left( \beta - 2 \arccos \left( \frac{|\sin(\alpha/2)|}{\sqrt{1 - 2 \cos(\alpha/2) \exp(\frac{-r}{2\delta}) + \exp(\frac{-r}{2\delta})^2}} \right) \right).$$

Der neue Prozess hat veränderte Parameter

$$\beta_n = \beta + \theta\alpha.$$

# 4.4 Wert europäischer Kaufoptionen

## 4.4.1 Herleitung nach dem Martingalansatz

Ebenso wie in der Modellwelt von *Black/Scholes* und *Merton* lässt sich das Ergebnis auch als Ergebnis einer Differentialgleichung herleiten. Mit der in Abschnitt 4.2.3 festgestellten Eigenschaft, dass Lévy-Prozesse Semimartingale sind, lässt sich nun Ito's Lemma für Semimartingale anwenden.<sup>84</sup> So kann die Formel von *Feynman/Kac* auf den Fall von Lévy-Prozessen erweitert werden.<sup>85</sup> Unter Verwendung der Ergebnisse der Esscher-Transformation

<sup>81</sup>Zum Lévy-Tripel des Normal Inversen Gauss-Prozesses vgl. **Schoutens** (2003), S. 153 f.

<sup>82</sup>Zur genauen Berechnung vgl. hier und im Folgenden Anhang C.3.

<sup>83</sup>Vgl. **Grigelionis** (1999), S. 36.

<sup>84</sup>Vgl. **Jacod/Shiryaev** (2003), S. 57 f.

<sup>85</sup>Vgl. **Chan** (1999), S. 524 f. oder für den Fall des Wiener-Prozesses **Øksendal** (1998), S. 135 ff.

erhält man eine fundamentale Integrodifferentialgleichung.

Dieser Lösungsweg soll im Folgenden nicht weiter verfolgt werden. Stattdessen kann, nachdem ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß mit Hilfe der Esscher-Transformation abgeleitet wurde, der Preis etwa einer europäischen Kaufoption über die Martingalgleichung

$$\begin{aligned} C &= E_Q(\exp(-rt)(S_t - B)^+) \\ &= \exp(-rt) \int_{-\infty}^{+\infty} (S_0 \exp(Y_t) - B)^+ f^\theta(Y_t) dY_t \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

für ein spezifisches  $\theta$  bestimmt werden.<sup>86</sup> Es ist aber bislang nur die charakteristische Funktion der einzusetzenden Verteilungsfunktion bekannt. Um obige Formel verwenden zu können, muss nun die charakteristische Funktion  $f^\theta(\eta)$  in ihre korrespondierende Verteilungsfunktion übersetzt werden:<sup>87</sup>

$$f^\theta(Y_t) = \frac{1}{2\pi} E_Q(\exp(-i\eta Y_t) \hat{f}^\theta(\eta)).$$

Setzt man diese Funktion in Gleichung (4.4.1) ein, erhält man

$$C = \frac{\exp(-rt)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (S_0 \exp(Y_t) - B)^+ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\eta Y_t) \hat{f}^\theta(\eta) d\eta dY_t. \quad (4.4.2)$$

Die Integrierbarkeit der Dichtefunktion wurde als eine Voraussetzung an die Verteilungsfunktion in Abschnitt 4.2.1 gestellt. Diese Eigenschaft im  $\mathbb{C}$  ausnützend lässt sich nach dem Satz von Fubini<sup>88</sup> die Integrationsreihenfolge vertauschen und das innere Integral kann als

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iY_t\eta) \hat{B}(Y_t) dY_t \quad (4.4.3)$$

geschrieben werden, wobei  $\hat{B}(Y_t) = (S_0 \exp(Y_t) - B)^+$  die Auszahlungsfunktion der Option darstellt. Gleichung (4.4.3) ist die Fouriertransformierte  $\hat{C}(\eta)$  der Optionsauszahlungsfunktion.<sup>89</sup> Setzt man die Auszahlungsfunktion ein, passt zur Auflösung der Maximumsfunktion  $S_0 \exp(Y_t) - B > 0$  die untere Integrationsgrenze zu  $Y_t > \ln \frac{B}{S_0}$  an, ergibt dies:

$$\hat{C}(\eta) = S_0 \int_{\ln \frac{B}{S_0}}^{+\infty} \left( \exp(Y_t(1 - i\eta)) - \frac{B}{S_0} \exp(-iY_t\eta) \right) dY_t = - \frac{B \exp\left(-i\eta \ln \frac{B}{S_0}\right)}{(\eta + i)\eta}.$$

<sup>86</sup> Zur Erinnerung sei noch erwähnt, dass das Integral für gewisse Funktionen endlich ist, wie in Abschnitt 4.2.1 dokumentiert. Andere Autoren führen, um die Endlichkeit zu erreichen, eine exponentielle Trunkierung ein. Vgl. Carr/Madan (1999), S. 63 oder i. A. Koponen (1995), S. 1197.

<sup>87</sup> Vgl. Bosch (1992), S. 246.

<sup>88</sup> Vgl. etwa Elstrodt (1996), S. 173 f.

<sup>89</sup> Vgl. die ähnliche Vorgehensweise bei Carr/Madan (1999), S. 64. Diese leiten aber zuerst die Fouriertransformierte des Derivatpreises her.

Das Gleichheitszeichen ergibt sich unter der Bedingung, dass nur die untere Integrationsgrenze von Relevanz ist. Dies kann vorausgesetzt werden, falls die Funktion  $\tilde{B}(Y_t)$  für  $Y_t \rightarrow \infty$  absolut gegen null konvergiert, wofür Bedingungen angegeben werden können.<sup>90</sup> Somit erhält man für den Optionspreis aus Gleichung (4.4.2):<sup>91</sup>

$$C = \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\eta \ln(S_0/B) - t(r + \Phi_Q(\eta)))}{\eta(\eta + i)} d\eta. \quad (4.4.4)$$

In der Literatur wird vorgeschlagen, das verbleibende Integral bspw. mit Hilfe der Schnellen Fouriertransformation<sup>92</sup> numerisch zu lösen.<sup>93</sup> Das Ergebnis der Modellwelt von *Black/Scholes* und *Merton* ist selbstverständlich auch über diese Formel ableitbar. Setzt man bereits in Gleichung (4.4.2) die charakteristische Funktion der Normalverteilung  $f^\theta(Y_t)$  mit  $\Phi_Q(\eta)$  wie aus (4.3.9) ein

$$C = \exp(-rt) \int_{-\infty}^{+\infty} (S_0 \exp(Y_t) - B)^+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\eta Y_t) \exp(-t\Phi_Q(\eta)) d\eta dY_t$$

und evaluiert das innere Integral, erhält man

$$C = \exp(-rt) \int_{-\infty}^{+\infty} (S_0 \exp(Y_t) - B)^+ n_{v_1}\left(-\frac{1}{2}\sigma_t^2 + rt, \sigma_t\right) dY_t,$$

wobei  $n_{v_1}()$  die Dichte der Normalverteilung darstellt. Die wohlbekannte Lösung dieses Integrals ergibt dann das Resultat von *Black/Scholes* und *Merton*.<sup>94</sup>

## 4.4.2 Wert europäischer Optionen auf den DAX

Setzt man die charakteristische Funktion mit den modifizierten Lévy-Exponenten aus Abschnitt 4.3.4 in die Formel (4.4.4) ein, kann man numerische Ergebnisse für Optionspreise ermitteln.<sup>95</sup> Dies wurde im Folgenden für den Mixed Meixner-Prozess durchgeführt, der sich nach dem Abschnitt 4.2.4 sehr gut zur Approximation der empirisch beobachteten Daxrenditen

<sup>90</sup>Vgl. **Boyarchenko/Levendorskii** (2003), S. 10.

<sup>91</sup>Dieses Ergebnis weicht vom Ergebnis aus *Boyarchenko/Levendorskii* ab. Vgl. **Boyarchenko/Levendorskii** (2002), S. 106 und S. 258 ff., deren Formel missverständlich ist.

<sup>92</sup>Vgl. etwa **Beth** (1984).

<sup>93</sup>Eine alternative Darstellung leiten *Bakshi/Madan* her. Vgl. **Bakshi/Madan** (2000), S. 212 f. In manchen Fällen kann man auch auf analytischem Wege eine Darstellung herleiten, die leicht handhabbar ist. Vgl. für den Varianz Gamma-Prozess **Madan et al.** (1998), S. 88.

<sup>94</sup>Vgl. **Irle** (1998), S. 155.

<sup>95</sup>Vgl. zu Verfahren der numerischen Integration etwa **Hämmerlin/Hofmann** (1988), S. 291 ff.

erwiesen hat. Aufbauend auf der Anpassung in Abschnitt 4.2.4 wurde der Mixed Meixner-Prozess kalibriert und der Prozess mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 4.3.4 transformiert. Berechnet man nun die Ergebnisse für verschiedene Basiswerte einer europäischen Kaufoption mit Laufzeit 30 Börsentage und vergleicht diese mit den Optionspreisen nach *Black/Scholes* und *Merton*, erhält man folgende Graphik:<sup>96</sup>

---

<sup>96</sup>Die numerische Integration wurde in Maple durchgeführt.

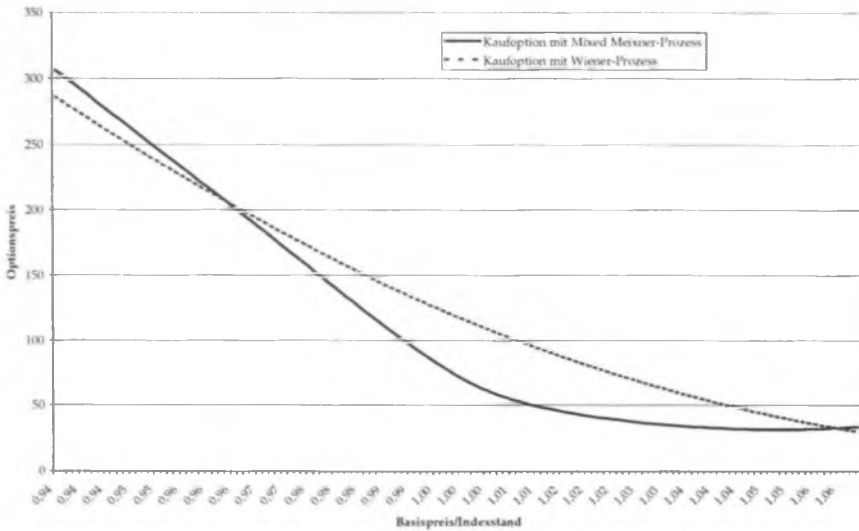


Abbildung 4.2: Optionspreise beim Mixed Meixner- und Wiener-Prozess

Man erkennt zum Einen, dass die Ergebnisse für Optionen im Geld und aus dem Geld höhere Werte ergeben. Berechnet man zu den verschiedenen Parametern auch die impliziten Volatilitäten, ergibt sich folgendes Bild.<sup>97</sup>

<sup>97</sup>Bei der Berechnung der Volatilitäten wurde ein zweistufiges Verfahren eingesetzt. Zuerst wurde mittels der Näherung  $d_2 = NV_1^{-1} \left( \frac{C(B^*) - C(B^{**})}{B^* - B^{**}} \right)$  ein Startwert für die Volatilität ermittelt. Im zweiten Schritt wurde die Näherung weiter nachiteriert.

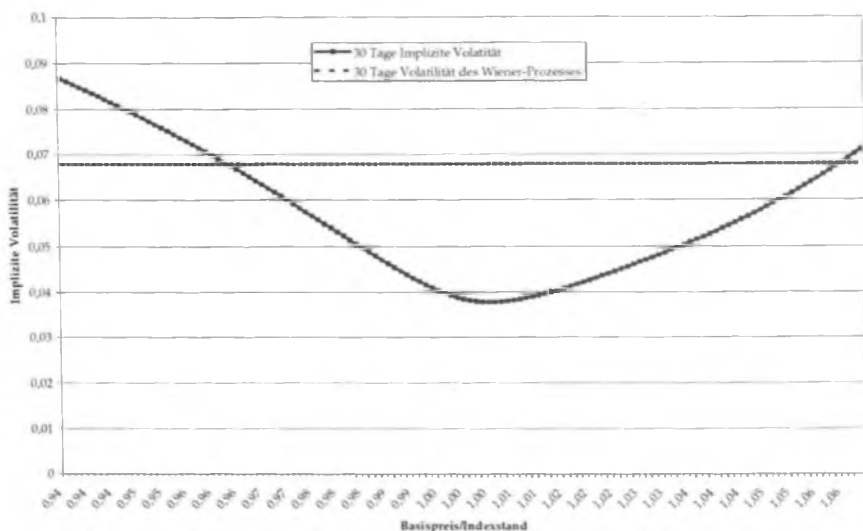


Abbildung 4.3: *Volatility-Smile* beim *Mixed Meirner-Prozess*

Dieses Bild entspricht damit auch den Ergebnissen, die man erhält, wenn man die impliziten Volatilitäten aus Optionspreisen errechnet, also dem bekannten *Volatility-Smile*. Dies war zu erwarten, da, wie sich in Abschnitt 4.2.4 gezeigt hat, die Randverteilungen der Lévy-Prozesse mehr Wahrscheinlichkeit an den Enden aufweisen als die Randverteilung des Wiener-Prozesses.

## 4.5 Wert von Compound-Optionen

### 4.5.1 Esscher-Transformation

Bei der Bewertung solcher Ansprüche steht die Suche nach einem geeigneten Bewertungsfunktional wiederum an erster Stelle. Aufgrund der prozessualen Eigenschaften ist der Markt wie in Abschnitt 4.3.1 gezeigt, grundsätzlich nicht vollständig. Deswegen ist an dieser Stelle im Gegensatz zu 3.3.1 kein Beweis der Anwendungsvoraussetzungen von Nöten, da keine Bewertung rein auf Basis des Arbitragegedankens erfolgen kann.<sup>98</sup>

Als Maßtransformation wird die Esscher-Transformation vorgeschlagen, die

<sup>98</sup>Wie bemerkt zeigen Eberlein/Jacod, dass alle Maßwechsel auf Maße, die arbitragefreie Märkte gewährleisten, möglich sind. Vgl. Eberlein/Jacod (1997), S. 134.



für diese Prozesse besonders geeignet scheint. Denn sie setzt ausschließlich auf der Randverteilung auf, die bei Lévy Prozessen eindeutig durch die Lévy-Chintschin-Formel beschrieben werden kann, und macht somit aus einer Transformation des gesamten Prozesses eine Transformation eines Randverteilungsmasses.

Die Esscher Transformation ist dabei auch auf Zeitintervallen  $\tau$ , die nicht im Zeitpunkt null beginnen, definierbar:

$$\frac{dQ_\tau}{dP_\tau} = \exp(\theta Y_\tau - c(\theta, \tau)), \quad (4.5.1)$$

wobei  $\theta$  eine Konstante darstellt und  $c(\theta, \tau)$  eine Funktion von  $\theta$  und  $\tau$  beschreibt.

Da Lévy-Prozesse die Markoveigenschaft besitzen, wie Eigenschaft 2 der Lévy-Prozesse aus Abschnitt 4.2.1 besagt, können die folgenden Operationen für jedes  $\tau$  durchgeführt werden. Die Martingalgleichung lässt sich unter Einbeziehung der Radon-Nikodym-Ableitung für jedes Zeitintervall  $\tau$  umschreiben:

$$S_0 = \exp(-r\tau) E_{Q_\tau}(S_0 \exp(Y_\tau)) = \exp(-r\tau) E_{P_\tau} \left( S_0 \exp(Y_\tau) \frac{dQ_\tau}{dP_\tau} \right) = \quad (4.5.2)$$

$$S_0 E_{P_\tau}(\exp((1 + \theta)Y_\tau - c(\theta, \tau) - r\tau)).$$

Für den den Lévy-Exponenten unter  $Q_\tau$  ergibt sich wiederum folgender Zusammenhang zum Lévy-Exponenten unter  $P_\tau$

$$\Phi_{Q_\tau}(\eta) = \Phi_{P_\tau}(\eta - \iota\theta) - \Phi_{P_\tau}(-\iota\theta), \quad (4.5.3)$$

was sich analog zu dem in Abschnitt 4.3.2 dargestellten ermitteln lässt.

## 4.5.2 Herleitung nach dem Martingalansatz

Bei der Bestimmung des Wertes der Compound-Option wird dabei auf den einfachsten Fall aus Abschnitt 3.2 zurückgegriffen: Eine europäische Kaufoption, bei deren Ausübung man eine europäische Kaufoption erhält. Zu bestimmen ist also der Wert einer 1. Option  $C_0$  auf eine 2. Option mit Wert  $S_0$  im Zeitpunkt  $t_0$ . Durch Ausüben der 1. Option kann zum Zeitpunkt  $t_1 = \tau_1 + t_0$  die 2. Option zum Preis  $B_1$  bezogen werden. Durch Ausüben der 2. Option kann der Basiswert  $V$ , ein risikobehafteter Vermögenswert, für den Kurs  $B_2$  zum Zeitpunkt  $t_2 = \tau_2 + t_0$  bezogen werden.

Wie in Abschnitt 3.3.3 kann man den Wert der Compound-Option über ihre Martingalgleichung darstellen, mit dem Unterschied, dass die Renditen  $y_t$  nicht mehr einem Wiener-Prozess, sondern allgemein einem Lévy-Prozess folgen:

$$C_0 = \exp(-r\tau_1) \quad (4.5.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \exp(-r\hat{\tau}) \int_{-\infty}^{+\infty} (V_0 \exp(y_2) - B_2)^+ f^\theta(y_2 | y_1) dy_2 - B_1 \right)^+ f^\theta(y_1) dy_1.$$

Nutzt man nun die Eigenschaft 2 der Lévy-Prozesse aus Abschnitt 4.2.1, die Unabhängigkeit der Zuwächse, kann eine neue Variable als Zuwachs zwischen den Zeitpunkten  $t_2$  und  $t_1$  eingeführt werden. Daher ergibt sich für die Dichtefunktion

$$f^\theta(y_{\hat{\tau}} | y_1) = f^\theta(y_{\hat{\tau}}).$$

Löst man in Gleichung (4.5.4) analog zu Abschnitt 3.3.3 die Maximumsfunktionen auf, erhält man

$$C_0 = \exp(-r\tau_1) \quad (4.5.5)$$

$$\int_{y_1^*}^{+\infty} \left( \exp(-r\hat{\tau}) \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - y_1}^{+\infty} (V_0 \exp(y_{\hat{\tau}} + y_1) - B_2) f^\theta(y_{\hat{\tau}}) dy_{\hat{\tau}} - B_1 \right) f^\theta(y_1) dy_1,$$

wobei nun  $y_1^* = \ln \frac{V_1^*}{V_0}$  die Rendite darstellt, bei der die 2. Option gerade dem Basispreis  $B_1$  entspricht.

Setzt man in (4.5.5) die charakteristischen Funktionen  $\hat{f}^\theta(\eta_1)$  und  $\hat{f}^\theta(\eta_{\hat{\tau}})$  ein und vertauscht die Integrationsreihenfolge, ergibt dies:

$$\begin{aligned} C_0 = \exp(-r\tau_1) & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{y_1^*}^{+\infty} \\ & \left( \exp(-r\hat{\tau}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - y_1}^{+\infty} (V_0 \exp(y_{\hat{\tau}} + y_1) - B_2) \exp(-\iota y_{\hat{\tau}} \eta_{\hat{\tau}}) \right. \\ & \left. \frac{1}{2\pi} \hat{f}^\theta(\eta_{\hat{\tau}}) dy_{\hat{\tau}} d\eta_{\hat{\tau}} - B_1 \right) \exp(-\iota y_1 \eta_1) \frac{1}{2\pi} \hat{f}^\theta(\eta_1) dy_1 d\eta_1. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Evaluiert man nun analog zu Gleichung (4.4.3), wobei wiederum die Konvergenzbedingungen gelten müssen, das innerste Integral, erhält man:

$$\begin{aligned} C_0 = \exp(-r\tau_1) & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{y_1^*}^{+\infty} \\ & \left( \exp(-r\hat{\tau}) \int_{-\infty}^{+\infty} -B_2 \exp(\iota y_1 \eta_{\hat{\tau}}) \frac{\exp(-\iota \eta_{\hat{\tau}} \ln(V_0/B_2))}{2\pi \eta_{\hat{\tau}} (\eta_{\hat{\tau}} + \iota)} \hat{f}^\theta(\eta_{\hat{\tau}}) d\eta_{\hat{\tau}} - B_1 \right) \\ & \exp(-\iota y_1 \eta_1) dy_1 \frac{1}{2\pi} \hat{f}^\theta(\eta_1) d\eta_1. \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Führt man die gleiche Operation für das äußere Integral durch, resultiert das für den ersten Term in:

$$\exp(-r\tau_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \quad (4.5.8)$$

$$\int_{y_1^*}^{+\infty} -B_2 \exp(\iota y_1 \eta_{\bar{\tau}}) \frac{\exp(-\iota \eta_{\bar{\tau}} \ln(V_0/B_2))}{2\pi \eta_{\bar{\tau}} (\eta_{\bar{\tau}} + \iota)} \hat{f}^{\theta}(\eta_{\bar{\tau}}) \exp(-\iota y_1 \eta_1) \frac{1}{2\pi} \hat{f}^{\theta}(\eta_1) dy_1 d\eta_{\bar{\tau}} d\eta_1$$

und damit zu

$$\exp(-r\tau_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \quad (4.5.9)$$

$$B_2 \frac{\exp(\ln(V_0/V^*)(\iota \eta_{\bar{\tau}} - \iota \eta_1)) \exp(-\iota \eta_{\bar{\tau}} \ln(V_0/B_2))}{4\pi^2 \iota \eta_{\bar{\tau}} (\eta_{\bar{\tau}} + \iota) (\eta_{\bar{\tau}} - \eta_1)} \hat{f}^{\theta}(\eta_{\bar{\tau}}) \hat{f}^{\theta}(\eta_1) d\eta_{\bar{\tau}} d\eta_1.$$

Der zweite Term aus Gleichung (4.5.7) ergibt dann:

$$-\exp(-r\tau_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{y_1^*}^{+\infty} B_1 \exp(-\iota y_1 \eta_1) dy_1 \frac{1}{2\pi} \hat{f}^{\theta}(\eta_1) d\eta_1,$$

was zu

$$\exp(-r\tau_1) \int_{-\infty}^{+\infty} B_1 \frac{\exp(-\iota \ln(V_0/V^*) \eta_1)}{2\pi \iota \eta_1} \hat{f}^{\theta}(\eta_1) d\eta_1 \quad (4.5.10)$$

verändert werden kann. Gleichung (4.5.9) und (4.5.10) ergeben dann

$$C_0 = \exp(-r\tau_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \quad (4.5.11)$$

$$B_2 \frac{\exp(\ln(V_0/V^*)(\iota \eta_{\bar{\tau}} - \iota \eta_1)) \exp(-\iota \eta_{\bar{\tau}} \ln(V_0/B_2))}{4\pi^2 \iota \eta_{\bar{\tau}} (\eta_{\bar{\tau}} + \iota) (\eta_{\bar{\tau}} - \eta_1)} \hat{f}^{\theta}(\eta_{\bar{\tau}}) \hat{f}^{\theta}(\eta_1) d\eta_{\bar{\tau}} d\eta_1 \\ + \exp(-r\tau_1) \int_{-\infty}^{+\infty} B_1 \frac{\exp(-\iota \ln(V_0/V^*) \eta_1)}{2\pi \iota \eta_1} \hat{f}^{\theta}(\eta_1) d\eta_1.$$

Führt man nun die charakteristische Funktion mit der Lévy-Chintschin-Formel (4.2.1) ein, ergibt dies

$$C_0 = \exp(-r\tau_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \quad (4.5.12)$$

$$B_2 \frac{\exp(\ln(V_0/V^*)(\iota \eta_{\bar{\tau}} - \iota \eta_1)) \exp(-\iota \eta_{\bar{\tau}} \ln(V_0/B_2) - \bar{\tau} \Phi_{Q_{\bar{\tau}}}(\eta_{\bar{\tau}}) - \tau_1 \Phi_{Q_{\tau_1}}(\eta_1))}{4\pi^2 \iota \eta_{\bar{\tau}} (\eta_{\bar{\tau}} + \iota) (\eta_{\bar{\tau}} - \eta_1)} \\ d\eta_{\bar{\tau}} d\eta_1 + \exp(-r\tau_1) \int_{-\infty}^{+\infty} B_1 \frac{\exp(-\iota \ln(V_0/V^*) \eta_1 - \tau_1 \Phi_{Q_{\tau_1}}(\eta_1))}{2\pi \iota \eta_1} d\eta_1.$$

Unter gewissen prozessualen Annahmen ist dabei eine Vereinfachung möglich. Hier genügt in Anlehnung an Abschnitt 4.4 diese Darstellung.

### 4.5.3 Modellauswertung

Zur Auswertung wird eine spezifischer Lévy-Prozess unterstellt. Dabei hat sich der Mixed Meixner-Prozess als eine mögliche Alternative ergeben.<sup>99</sup> Ermittelt man unter dieser prozessualen Annahme die Optionspreise für verschiedene Basiswerte erhält man im Vergleich zu 4.2 eine noch steilere Kurve:

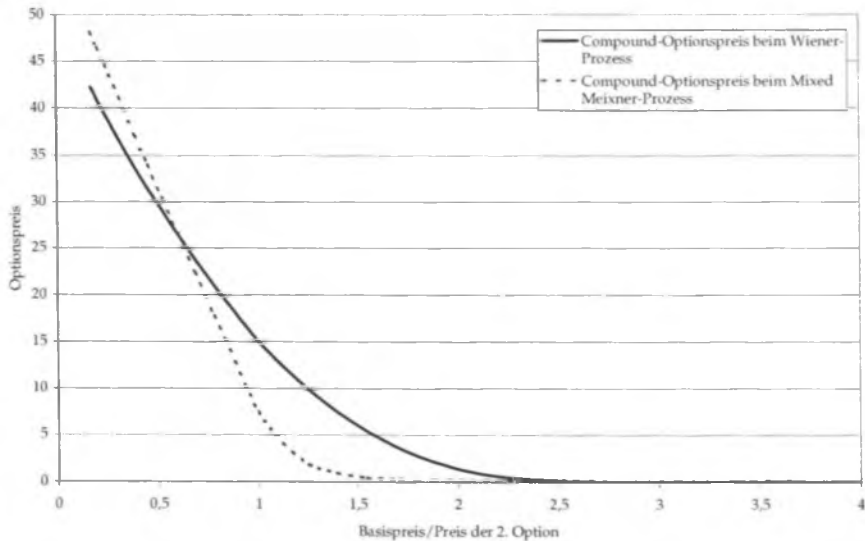


Abbildung 4.4: *Compound-Optionen bei Mixed Meixner- und Wiener-Prozess*

Man erkennt, dass ebenfalls die Ergebnisse für Optionen im Geld und aus dem Geld noch höhere Werte ergeben. Berechnet man zu den verschiedenen Parametern wie in 4.4.2 die impliziten Volatilitäten ergibt sich folgendes Bild.

<sup>99</sup>Vgl. Abschnitt 4.2.4.

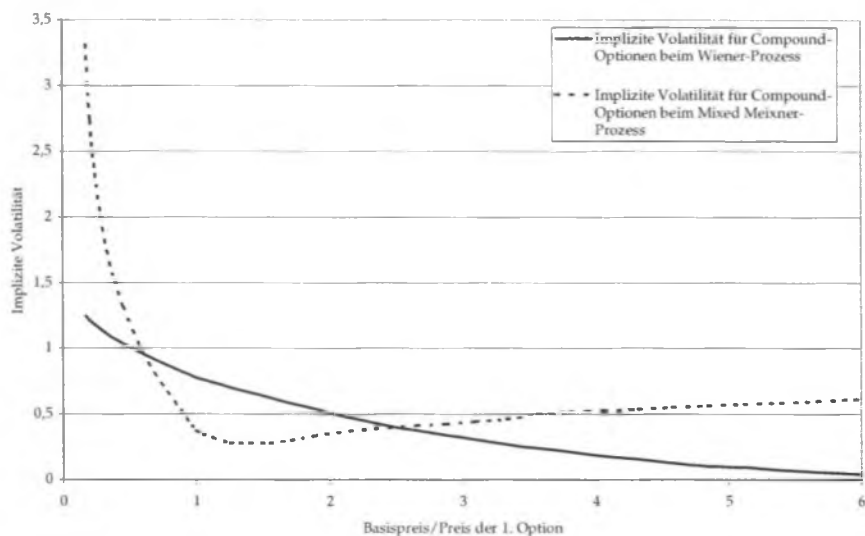


Abbildung 4.5: *Volatility-Smile für Compound-Optionen bei Mixed Meixner-Prozess und Wiener-Prozess*

Hier sieht man, dass Compound-Optionen beim Wiener-Prozess nur zu einem Anstieg der Volatilitäten für Optionen im Geld führen. Dies ist darin begründet, dass zu Grunde liegende Leverage-Effekt nur einseitig wirkt. Eine solches Verhalten kann auch als Volatility-Skew bezeichnet werden.<sup>100</sup> Bei ausschließlicher Verwendung des Mixed Meixner-Prozesses war dieser nicht so ausgeprägt. Hier erhielt man einen symmetrischen Volatility-Smile, der sich auch oft für Indexoptionen auf den DAX nachweisen lässt.

## 4.6 Zusammenfassung

In vielen wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen stellen der Wiener-Prozess und die Normalverteilung die Standardannahmen für einen stochastischen Prozess und seine Randverteilung dar. Das ist insbesondere in der Kapitalmarkttheorie der Fall.

Zahlreiche empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass Verteilungen von Aktienkursrenditen nur unzureichend durch die Normalverteilung abgebildet werden können. Zur Approximation der Verteilung erwiesen sich

<sup>100</sup>Vgl. hier und im Folgenden **Wallmeier** (2003), S. 90 ff.

in der Literatur und erweisen sich meist die nichtnormalen stabilen Verteilungen als besser geeignet.

Diese Verteilungsklasse hat aber den Nachteil, dass die für die klassische Optionswertberechnung nötigen Exponentialmomente nur für die Normalverteilung endlich sind. Erweitert man den Verteilungstyp und betrachtet die Verteilungsfunktionen unbegrenzt teilbarer Zufallsvariablen, kann man einen stochastischen Prozess erzeugen, den Lévy-Prozess, für den einige Vertreter gefunden werden können, die endliche Exponentialmomente besitzen. Somit liegt die Überlegung nahe Optionen unter nichtnormalen Lévy-Prozessen zu bewerten und eventuell bessere Ergebnisse zu erzielen als bei einer Bewertung in der Welt von *Black/Scholes* und *Merton* mit dem Wiener-Prozess.

Auf Basis dieser die empirischen Daten besser abbildenden Prozesstypen wurde dann eine Optionsbewertung vorgenommen werden. Allerdings kann diese Optionsbewertung nur teilweise analog zur klassischen Vorgehensweise bei *Black/Scholes* und *Merton* erfolgen. Die Bewertung findet zwar auf Basis der Arbitragefreiheitsannahmen statt. Allerdings ist der Markt meist nicht vollständig, so dass u.U. keine Duplikation stattfinden und kein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß abgeleitet werden kann.

Um ein eindeutiges Maß zu erzeugen, müssen zusätzliche Annahmen getroffen werden, wie etwa das Einführen einer Nutzenfunktion, das Aufsuchen einer risikominimalen Strategie oder das einfache ex ante Festlegen einer Maßwechselfunktion. Im nächsten Abschnitt wurde die Esscher-Transformation als Maßwechselfunktion eingesetzt.

Auf Basis des eindeutigen Martingalmaßes wurde ein Optionspreis unter der Annahme von Lévy-Prozessen generell abgeleitet. Dabei wurde im Weiteren auf einen Mixed Meixner-Prozess, einen reinen Sprungprozess ohne Diffusionskomponente, fokussiert, unter dem diese Vorgehensweise auf europäische Kaufoptionen auf den DAX angewendet wurde. Als Ergebnis erhält man Abweichungen zu den Preisen nach *Black/Scholes* und *Merton*. Ermittelt man aus den so bestimmten Preisen für europäische Kaufoptionen die impliziten Volatilitäten, zeigt sich der charakteristische in vielen Studien beobachtete Volatility-Smile.

Nachdem demonstriert wurde, dass Lévy-Prozesse geeignet sind, um als Prozessannahme bei der Optionsbewertung zu dienen, wurde das eigentliche bedingte Optionsproblem angegangen. Unter Lévy-Prozessen wurde mit der Martingalmethode der Wert einer Compound-Option ermittelt. Um ein Martingalmaß zu bestimmen, musste wiederum die Esscher-Transformation bestimmt werden. Zum Abschluss wurde der Wert unter dem Mixed Meixner-Prozess ausgewertet.

Alles in Allem scheint eine Optionsbewertung unter Lévy-Prozessen eine vielversprechende Alternative darzustellen. Insbesondere bei exotischen Optionstypen, wie Compound-Optionen, bei denen die Nichtnormalität

---

stark zu Buche schlägt, könnte sich eine Anwendung in der Zukunft als nützlich erweisen.





## Kapitel 5

# Zusammenfassung und Ausblick



## 5.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden verschiedene Fragestellungen untersucht, die Mehrprozess-Probleme und bedingte Optionsbewertungsprobleme betreffen. Der Aufbau der Arbeit richtete sich damit nach dem Konzept diese Problemkreise zu erschließen. Auf der Basis des Zeit/Ergebnis-Gerüsts, genauer auf der Basis der Mächtigkeit der beiden Mengen, wurde nach

1. Abzählbare Zeit- und Zustandsmenge (Diskreter Prozess)
2. Überabzählbare Zeit- und Zustandsmenge (Wiener-Prozess)
3. Überabzählbare Zeit- und (abzählbare oder überabzählbare Zustandsmenge) (Lévy-Prozess)

unterschieden.

Im Fall abzählbarer Zeit- und Zustandsmenge wird zuweilen in der Literatur eine Lösung mit Hilfe des Binomialbaums zu erreichen versucht. Im Abschnitt 2.4 wurde gezeigt, dass eine solche Lösung nur für den trivialen Fall möglich ist. Stattdessen wurde ein zielführender stochastischer Prozess aufgestellt, der einerseits ein vollständiges Preissystem gewährleistet und andererseits an die gewünschten Daten angepasst werden kann. Zur Kalibrierung wurden in Abschnitt 2.4.2 allgemeine Bedingungen aufgestellt. In einer praktischen Fallstudie, in der bedingte Optionsprobleme wie Mehrprozess-Probleme auftreten, wurden dann die Bedingungen dargestellt und dem gemäße Prozesse zur Problemlösung aufgestellt. Diese Bedingungen sind allerdings nichtlinearer Natur, so dass die Lösungen nur in Ausnahmefällen eindeutig und nicht zuletzt deswegen auch schwierig zu ermitteln sind.

Um allerdings eine effiziente Bewertung auch bei einer Vielzahl von Preisprozessen durchführen zu können, wurden die Bedingungen modifiziert. Zum Aufbau des Systems von Prozessen und der Anpassung an die Marktdaten, wurde die Zerlegung der Varianz-Kovarianz-Matrix nach *Cholesky* verwendet. Die so erhaltene Matrix konnte dann durch Multiplikation mit Zufallsvariablenvektoren vereinfachter Grundprozesse zu Zustandsvektoren mit den gewünschten Eigenschaften transformiert werden. Die Anpassung der Erwartungswerte der Preisprozesse an die Kapitalmarktdaten stellte ebenso eine lineare Operation, eine einfache Addition, dar. Dadurch wurde das Problem linearisiert und ist damit numerisch besser handhabbar. Am Beispiel von Marktdaten für Finanzinnovationen wurde aufgezeigt wie diese Vorgehensweise einsetzbar ist. Es zeigte sich, dass diese Vorgehensweise rasch zu brauchbaren Resultaten führt.

Zum Zweiten wurden Mehrprozess-Probleme und bedingte Optionsprobleme unter Wiener-Prozessen betrachtet. Zunächst wurde eine Bewertung

für Compound-Optionen mit dem Martingalansatz entwickelt. Dazu wurde zuerst gezeigt, dass der Martingalansatz anwendbar ist und unter diesen prozessualen Bedingungen ein eindeutiges Martingalmaß existiert. Dieses wurde in Abschnitt 3.3.2 bestimmt und unterscheidet sich nicht vom Maß in einer Welt nach *Black/Scholes* und *Merton*. Die Markoveigenschaft des Wiener-Prozesses ausnützend wurde im Abschnitt 3.3.3 der Wert der Compound-Option ermittelt. Dieser kann dann mit den Werten aus den Lösungsvorschlägen nach *Geske* verglichen werden. *Geske* ermittelt zum Einen den Wert der Compound-Optionen nach dem Differentialgleichungsansatz. Mit diesem stimmt das hergeleitete Ergebnis überein. Zum Anderen schlägt *Geske* auch die Herleitung mit dem Martingalansatz vor. In Abschnitt 3.3.4 wurde gezeigt, dass sein Vorschlag nicht zum selben Ergebnis wie der Differentialgleichungsansatz und der in Abschnitt 3.3.3 dargestellte Ansatz führt.

Aufbauend auf der Lösung nach dem Martingalansatz kann eine Übertragung des Problems der Compound-Optionen auf weitere Optionsbewertungsprobleme vorgenommen werden. In einem ersten Schritt wurde die Lösungsmethode auf die Bewertung von Barrier-Optionen übertragen. Dies wurde zum Einen durch eine Uminterpretation der Bewertungsmethodik für Compound-Optionen erreicht. Zum Anderen konnte das Problem auf weitere Optionen übertragen werden. So wurde eine Bewertung von diskreten Barrier-Optionen mit  $n$ -Zeitpunkten entwickelt. Weiterhin zeigte sich, dass auch die Form der Ausübungsbedingungen, wie Knock-Out oder Knock-In, jederzeit variierbar ist.

Im zweiten Schritt wurde der Zusammenhang zwischen Mehrprozess-Problemen und bedingten Optionsproblemen untersucht. Durch Uminterpretation der geordneten Menge, auf der der stochastische Prozess definiert ist, von der Zeitdimension auf eine Preisprozessdimension, wurde eine Übertragung der Bewertung von Compound-Optionen auf die Bewertung von Optionen auf mehrere Aktien durchgeführt. Neben der einfachen Uminterpretation der Compound-Option auf ein Mehrprozess-Problem gelang es weitere Transfers vorzunehmen. So konnte das Problem der Bewertung von Maximum-Optionen nach *Stulz* zuerst zerlegt und in Einzelabschnitten als bedingtes Optionsproblem gelöst werden. Insgesamt lässt sich festhalten, dass durch Uminterpretation verschiedenste Mehrprozess-Probleme als bedingte Optionsprobleme behandelt werden können, aber auch ein Transfer in die Gegenrichtung möglich ist.

Alternativ wurden Mehrprozess- und bedingte Optionsprobleme auch unter weitergehenden Prozessannahmen, wie die der Lévy-Prozesse, betrachtet. Dazu wurden zunächst Lévy-Prozesse im Vergleich zum Spezialfall Wiener-Prozess definiert. Da die Randverteilungen von Lévy-Prozessen im Gegensatz zum Wiener-Prozess nur in Ausnahmefällen geschlossen darstellbar

sind, wurde daraufhin die charakteristische Funktion der Verteilung eingeführt. Diese hat für alle Lévy-Prozesse eine bestimmte Form, die sogenannte Lévy-Chintschin-Formel. Daneben erweist es sich bei manchen Problemen, wie dem Nachweis der Vollständigkeit, als günstig auf stochastische Differentialgleichungen als Darstellungsform der Lévy-Prozesse zurückzugreifen. Diese Darstellungsform wurde in Abschnitt 4.2.3 abgeleitet. Vor einer Modellierung in Lévy-Prozessen musste allerdings festgestellt werden, ob Lévy-Prozesse empirische Aktienkursprozesse besser abbilden und damit eine Optionsbewertung unter Lévy-Prozessen bessere Ergebnisse liefern kann. Diese Analyse wurde dabei für verschiedene Typen von Lévy-Prozessen im Abschnitt 4.2.4 an Hand der DAX-Daten der letzten 20 Jahre durchgeführt und zeigte, dass eine bessere Anpassung an die DAX-Daten als beim Wiener-Prozess möglich ist.

Analog zum Abschnitt 3 wurde auch für Lévy-Prozesse eine Bewertung mit der Martingalmethode angestrebt. Im ersten Unterabschnitt wurde dazu untersucht, ob eine Bewertung mit der Martingalmethode möglich ist. In Abschnitt 4.3.1 wurde nachgewiesen, dass das Preissystem nur in Ausnahmefällen vollständig ist. Damit ist ein eindeutiges Martingalmaß meist nicht bestimmbar. Um ein eindeutiges Maß zu erhalten, müssen zusätzliche Kriterien zur Bewertung herangezogen werden. In der Literatur werden dabei zahlreiche Kriterien vorgeschlagen. In der Arbeit wurde die Esscher-Transformation eingesetzt. Sie erwies sich im Vergleich zu den anderen Kriterien meist als äquivalent oder teilweise auch als besser geeignet. Für die Typen von Lévy-Prozessen, die sich in Abschnitt 4.2.4 als geeignet zur Approximation der empirischen Aktienkursprozesse erwiesen haben, wurden in Abschnitt 4.3.4 die Esscher-Transformationen durchgeführt und Martingalmaße hergeleitet.

Mit den so bestimmten Martingalmaßen wurde im Abschnitt 4.4 der Wert für europäische Kaufoptionen bestimmt. Diese Bewertungsmethode wurde dann auf Dax-Optionen angewendet. Ein Vergleich mit den Bewertungsergebnissen aus der Welt von *Black/Scholes* und *Merton* zeigte nicht unerhebliche Differenzen. Ermittelt man die impliziten Volatilitäten aus den Optionspreisen, die auf Basis von Lévy-Prozessen, hier speziell des Mixed Meixner-Prozesses, ermittelt wurden, erhält man den bekannten Volatility-Smile. Dies unterstreicht die Eignung der Lévy-Prozesse bei der Optionsbewertung.

Nach dieser Feststellung kann das eigentliche Ziel, die bedingte Optionsbewertung unter Lévy-Prozessen, angegangen werden. Zunächst wurde für diesen Fall ein Martingalmaß bestimmt. Dazu wurde wiederum die Esscher-Transformation herangezogen. Im nächsten Unterabschnitt wurde der Wert von Compound-Optionen bestimmt, wobei die charakteristische Funktion der Randverteilungen von Lévy-Prozessen zu Grunde gelegt wurde. Dieser wurde anschließend eingesetzt, um die Bewertung unter den in Abschnitt

4.2.4 empirisch diskutierten Prozesse, des Mixed Meixner-Prozesses, durchzuführen.

## 5.2 Ausblick

In dieser Arbeit wurden zahlreiche kleine und große noch offene Fragen zu bedingten Options- und Mehrprozess-Problemen bei der Bewertung von Optionen beantwortet. Zentrale Probleme waren,

- ein numerisch gut handhabbares Verfahren für die Bewertung von Optionen auf mehrere Vermögenswerte zu finden,
- den Zusammenhang zwischen Bewertungen von Optionen auf mehrere Vermögenswerte und bedingten Optionen darzustellen
- und Compound-Optionen unter der Voraussetzung weiterer Typen von stochastischen Prozessen, wie Typen von Lévy-Prozessen, zu bewerten.

Nichtdestoweniger bleiben einige Fragestellungen offen. So hängt das in Abschnitt 2 vorgestellte Verfahren entscheidend von den vereinfachten Grundprozessen ab, welche als Zufallszahlenvektoren durch Multiplikation mit der durch die Cholesky-Zerlegung gewonnenen Matrix die an die Prozessparameter kalibrierten Zufallszahlenvektoren ergeben. Offen ist die noch zu untersuchende Fragestellung, welche vereinfachten Grundprozesse besser geeignet sind, die gewünschten Bäume aufzustellen.

Der Grundgedanke der Übertragung von Mehrprozess- auf bedingte Optionsprobleme und umgekehrt, ist dabei noch nicht erschöpfend analysiert worden. So wurde in Abschnitt 3 schon die Rückübertragung des bedingten Optionsproblems auf Mehrprozess-Probleme, bei Average-Optionen, angediskutiert. Diese Möglichkeit besteht aber auch für das Verfahren aus Abschnitt 2, etwa bei der Bewertung von diskreten Barrier-Optionen. So kann nach Aufstellung der geeigneten Varianz-Kovarianz-Matrix ein Mehrprozess-Problem äquivalent zu einem diskreten Barrier-Problem aufgestellt werden und das Barrier-Problem als Mehrprozess-Problem gelöst werden.

Die Erweiterung auf Lévy-Prozesse wurde zwar angedacht und für Compound-Optionen in Abschnitt 4 durchgeführt. Insbesondere wurde der Mixed Meixner-Prozess verwendet. Weitere Prozessstypen sollten ebenso analysiert werden, um einen geeigneten Prozess zu finden, der bspw. für die Bewertung von Optionen auf Aktien auf ein Unternehmensvermögen als Compound-Optionen herangezogen werden kann. Insbesondere bleibt aber das Problem, dass unter Lévy-Prozessen nicht allein nach dem Paradigma der Arbitragefreiheit bewertet werden kann. Eine Überwindung dieses

Problems bspw. durch Hinzunahme zusätzlicher Vermögenswerte, wie Optionen, scheint vielversprechend und weiter diskussionswürdig zu sein.





## Anhang A

# Anhang zu Abschnitt 2

### A.1 Anhang

Unter den gewählten Werten ( $a_2^2 = 0, p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ ) ergeben sich für die Zustandsvariablen folgende Werte:

$$a_1^2 = \frac{\sqrt{6var^2}}{2}, \quad a_3^2 = -\frac{\sqrt{6var^2}}{2} \quad (\text{A.1.1})$$

$$a_1^1 = \sqrt{2var^1} \frac{\sqrt{3}\rho + \sqrt{1-\rho^2}}{2} \quad \text{bzw.} \quad a_1^1 = \sqrt{2var^1} \frac{\sqrt{3}\rho - \sqrt{1-\rho^2}}{2} \quad (\text{A.1.2})$$

$$a_3^1 = \sqrt{2var^1} \frac{-\sqrt{3}\rho + \sqrt{1-\rho^2}}{2} \quad \text{bzw.} \quad a_3^1 = \sqrt{2var^1} \frac{-\sqrt{3}\rho - \sqrt{1-\rho^2}}{2} \quad (\text{A.1.3})$$

$$a_2^1 = \sqrt{2var^1} \sqrt{1-\rho^2} \quad \text{resp.} \quad a_2^1 = -\sqrt{2var^1} \sqrt{1-\rho^2} \quad (\text{A.1.4})$$

oder

$$a_1^2 = -\frac{\sqrt{6var^2}}{2}, \quad a_3^2 = \frac{\sqrt{6var^2}}{2} \quad (\text{A.1.5})$$

$$a_1^1 = \sqrt{2var^1} \frac{-\sqrt{3}\rho + \sqrt{1-\rho^2}}{2} \quad \text{bzw.} \quad a_1^1 = \sqrt{2var^1} \frac{-\sqrt{3}\rho - \sqrt{1-\rho^2}}{2} \quad (\text{A.1.6})$$

$$a_3^1 = \sqrt{2var^1} \frac{\sqrt{3}\rho + \sqrt{1-\rho^2}}{2} \quad \text{bzw.} \quad a_3^1 = \sqrt{2var^1} \frac{\sqrt{3}\rho - \sqrt{1-\rho^2}}{2} \quad (\text{A.1.7})$$

$$a_2^1 = -\sqrt{2var^1} \sqrt{1-\rho^2} \quad \text{resp.} \quad a_2^1 = \sqrt{2var^1} \sqrt{1-\rho^2} \quad (\text{A.1.8})$$

mit  $\rho$  definiert als

$$\rho = \frac{cov^{12}}{\sqrt{var^1 var^2}}. \quad (\text{A.1.9})$$

## A.2 Anhang

Die Matrix  $A$  für die 15 Wertpapiere bestimmt sich zu:

Sony	0,025207	0	0	0	0	0
Honda	0,0093378	0,018641	0	0	0	0
Canon	0,013602	0,0056775	0,017437	0	0	0
Bridgestone	0,011489	0,0049814	0,0053598	0,024872	0	0
Siemens	0,013499	0,0026519	0,0011043	0,0013689	0,0210308	0
Pfizer	0,0030138	-0,0022231	-0,0027939	0,0042117	0,0039995	0,022640
Microsoft	0,0032546	-0,00091692	0,0014522	0,0041266	0,0093207	0,011252
LVMH	0,0074795	-0,00056261	-0,00050027	0,0014210	0,0048000	0,0074654
Deutsche Bank	0,0045235	-0,0036357	0,00051242	0,00082617	0,0057036	0,0065911
Dell	0,0082053	0,0015211	0,0028700	0,0058591	0,010555	0,0088937
Coca Cola	-0,0010971	0,00014575	0,00077516	0,00048560	0,0012341	0,0053782
Citigroup	0,0057147	0,00080905	0,00075953	0,0030178	0,011350	0,0083153
BMW	0,0057584	$-7,4887 \cdot 10^{-5}$	0,0015534	0,0029072	0,0047136	0,0049987
Pepsi	-0,00044298	-0,00014116	0,00095256	0,0036806	0,0022130	0,0038399
AXA	0,0072667	-0,0061966	0,0012965	-0,0011280	0,0082298	0,0082865

Deutsche Bank	0,017313	0	0	0	0	0
Dell	$-1,4319 \cdot 10^{-5}$	0,019929	0	0	0	0
Coca Cola	0,0031122	0,0012405	0,014294	0	0	0
Citigroup	0,0020713	0,0015232	0,0038530	0,020260	0	0
BMW	0,0051283	-0,00041080	-0,0022880	-0,00017493	0,015634	0
Pepsi	$4,2810 \cdot 10^{-6}$	-0,0016144	0,0094342	0,0035620	-0,0011603	0,020444
AXA	0,013503416	-0,00088156	-0,0020119	0,0019138	0,0023540	-0,00027404

Tabelle A.2: Zerlegung der Varianz-Kovarianz-Matrix beim Blue Yield Bond

<sup>1</sup> Auf die Darstellung der Nullen in den ersten 8 Zeilen wurde hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

## A.3 Anhang

Die Matrix der 15 unabhängigen Zufallsvektoren lautet:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,7386	0	0	0	0	0	0	0	0	-1,9365
0	2,7386	0	0	0	0	0	0	0	1,9365
-2,7386	0	0	0	0	0	0	0	0	-1,9365
0	-2,7386	0	0	0	0	0	0	0	1,9365
0	0	2,7386	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	2,7386	0	0	0	0	0	0
0	0	-2,7386	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-2,7386	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2,7386	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	2,7386	0	0	0	0
0	0	0	0	-2,7386	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-2,7386	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	2,7386	0	-1,9365	0
0	0	0	0	0	0	0	2,7386	1,9365	0
0	0	0	0	0	0	-2,7386	0	-1,9365	0
0	0	0	0	0	0	0	-2,7386	1,9365	0

12	13	14	15
0	1,3693	0	-0,96825
0	1,3693	0	-0,96825
0	1,3693	0	-0,96825
0	1,3693	0	-0,96825
-1,9365	-1,3693	0	-0,96825
1,9365	-1,3693	0	-0,96825
-1,9365	-1,3693	0	-0,96825
1,9365	-1,3693	0	-0,96825
0	0	1,3693	0,96825
0	0	1,3693	0,96825
0	0	1,3693	0,96825
0	0	1,3693	0,96825
0	0	-1,3693	0,96825
0	0	-1,3693	0,96825
0	0	-1,3693	0,96825
0	0	-1,3693	0,96825

Tabelle A.3: *Unabhängige Zufallsvariablenvektoren beim Blue Yield Bond*



## Anhang B

# Anhang zu Abschnitt 3

### B.1 Anhang

*Geske* bestimmt den Erwartungswert der Cash Flows der Compound Option und verwendet dazu die bedingte Verteilung für den Basiswert am Ende der Laufzeit der 1. Option gegeben den Basiswert zum Ende der Laufzeit der 2. Option.<sup>1</sup> Nach Einführung der Nomenklatur dieses Beitrags würde sich die Formel (7) von *Geske*, wie folgt, schreiben

$$\begin{aligned} C_0 = \exp(-r\tau_1) & \left( \int_{B_1}^{+\infty} V_2 N V_1 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{B_2} + \frac{1}{2} \sigma_{\hat{\tau}}^2 + r\hat{\tau}}{\sigma_{\hat{\tau}}} \right) f(V_1 | V_2) dV_2 \right. \\ & - B_2 \exp(-r\hat{\tau}) \int_{B_1}^{+\infty} N V_1 \left( \frac{\ln \frac{V_0}{B_2} - \frac{1}{2} \sigma_{\hat{\tau}}^2 + r\hat{\tau}}{\sigma_{\hat{\tau}}} \right) f(V_1 | V_2) dV_2 \\ & \left. - B_1 \int_{B_1}^{+\infty} f(V_1 | V_2) dV_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

Neben Kleinigkeiten, wie der falschen Laufzeitberechnung der 2. Option und einer Integrationsuntergrenze, die nach Auflösen der Maximumsfunktion  $V_1^*$  und nicht  $B_1$  beträgt, müssen die einzelnen Summanden näher betrachtet werden. Dazu kann ein Vergleich der einzelnen Summanden aus dieser Gleichung mit denen aus (3.3.8) herangezogen werden.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Vgl. *Geske* (1979), S. 70. *Geske* verwendet allerdings die Variable  $V$  für den Basiswert nicht immer eindeutig. Vgl. *Geske* (1979), S. 67. An dieser Stelle kann mit  $V$  nur die einzig mögliche Zufallsvariable, der Unternehmenswert zum Zeitpunkt der Liquidation, der Ausübung der 2. Option, gemeint sein.

<sup>2</sup>Dieser summandenweise Vergleich ist möglich. Das mittlere Integral ist als einziges jeweils von  $\exp(-r\tau_2)$  abhängig, da nach der ersten Substitution im ersten Integral der Gleichung (3.3.8) dieser Faktor verschwindet. Vgl. Anhang B.2. Das letzte Integral unterscheidet sich von den beiden anderen jeweils dadurch, dass es als einziges eine Funktion von  $B^1$  ergibt.

Vergleicht man nun den ersten und zweiten Term aus (B.1.1) mit denen aus (3.3.8) erkennt man zwei Unterschiede:

1. Die Integrationsvariable  $V_2$  muss durch  $V_1$ , damit die Integralgrenzen und die Integrationsreihenfolge mit der Vorgehensweise, zuerst die 2. Option und dann die 1. Option mit Laufzeit  $\tau_1$  zu bewerten, übereinstimmen.
2. Die Bedingung der bedingten Verteilung muss nach Berechnung des inneren Integrals der 2. Option angepasst werden, so dass anstelle der Punktbedingung  $V_2$  die Bedingung  $V_2 > B_2$  gesetzt werden muss. Betrachtet man dagegen den letzten Term von Gleichung (B.1.1) erkennt man, dass eine Bedingung hier nicht bestehen kann, da die 1. Option immer unabhängig von der zweiten ausgeübt werden kann.

Ändert man dies,<sup>3</sup> erhält man

$$\begin{aligned}
 C_0 = \exp(-r\tau_1) & \left( \int_{V_1^*}^{+\infty} V_1 N V_1 \left( \frac{\ln \frac{V_1}{B_2} + \frac{1}{2}\sigma_{\tau}^2 + r\hat{\tau}}{\sigma_{\tau}} \right) f(V_1 | V_2 > B_2) dV_1 \right. \\
 & - B_2 \exp(-r\hat{\tau}) \int_{V_1^*}^{+\infty} N V_1 \left( \frac{\ln \frac{V_1}{B_2} - \frac{1}{2}\sigma_{\tau}^2 + r\hat{\tau}}{\sigma_{\tau}} \right) f(V_1 | V_2 > B_2) dV_1 \\
 & \left. - B_1 \int_{V_1^*}^{+\infty} f(V_1) dV_1 \right). \tag{B.1.2}
 \end{aligned}$$

Dieses Resultat entspricht dem aus Gleichung (3.3.8) nach einmaligem Anwenden der Bayesschen Formel.<sup>4</sup>

<sup>3</sup>Es gibt weitere Wege die gewünschten Anpassungen in Formel (B.1.1) zu erreichen. So kann durch eine zusätzliche Integration des ganzen Ausdrucks nach  $dV_1$  das selbe Resultat erzielt werden.

<sup>4</sup>Vgl. zur Bayesschen Formel etwa **Bauer**(1991), S. 11.

## B.2 Anhang

Zu lösen ist folgendes Integral aus Gleichung (3.3.8):

$$C_0 = \exp(-r\tau_2) \int_{x_1^*}^{+\infty} \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - x_1}^{+\infty} V_0 \exp(x_{\hat{\tau}} + x_1) f(x_{\hat{\tau}}) dx_{\hat{\tau}} f(x_1) dx_1 - \\ \exp(-r\tau_2) B_2 \int_{x_1^*}^{+\infty} \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - x_1}^{+\infty} f(x_{\hat{\tau}}) dx_{\hat{\tau}} f(x_1) dx_1 - \\ \exp(-r\tau_1) B_1 \int_{x_1^*}^{+\infty} f(x_1) dx_1.$$

Das letzte Integral  $I_1$  ermittelt sich zu

$$I_1 = -\exp(-r\tau_1) B_1 \int_{\ln \frac{V_1^*}{V_0}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 - r\tau_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) dx_1,$$

so dass sich unter Berücksichtigung der Normalverteilung folgendes bekanntes Ergebnis ergibt

$$I_1 = -\exp(-r\tau_1) B_1 N V_1 \left( \frac{-\ln \frac{V_1^*}{V_0} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1} \right). \quad (\text{B.2.1})$$

Nachdem man  $x_{\hat{\tau}}$  durch  $(x_2 - x_1)$  und  $\sigma_{\hat{\tau}}^2$  durch  $(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)$ <sup>5</sup> ersetzt hat, ergibt das mittlere Integral  $I_2$  zu

$$I_2 = -\exp(-r\tau_2) B_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}} \\ \int_{\ln \frac{V_1^*}{V_0}}^{+\infty} \int_{\ln \frac{B_2}{V_0}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r\tau_2 - x_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1)^2}{2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}\right) dx_2 f(x_1) dx_1.$$

Ausbedingt, die Wahrscheinlichkeitsverteilung eingesetzt,  $\frac{x_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 - r\tau_1}{\sigma_1}$  durch  $u_1$  und  $\frac{x_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r\tau_2}{\sigma_2}$  durch  $u_2$  substituiert ergibt das

$$I_2 = -\exp(-r\tau_2) B_2 \frac{\sigma_2}{2\pi\sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} \quad (\text{B.2.2})$$

$$\int_{\frac{\ln \frac{V_1^*}{V_0} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 - r\tau_1}{\sigma_1}}^{+\infty} \int_{\frac{\ln \frac{B_2}{V_0} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r\tau_2}{\sigma_2}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\sigma_2 u_2 - \sigma_1 u_1)^2}{2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)} - \frac{(\sigma_1 u_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) du_2 du_1.$$

<sup>5</sup>Der Wiener-Prozess hat Zufallsvariablen, die wie bereits in Abschnitt 3.3.3 erwähnt u.i.v. sind. Vgl. **Bauer** (1991), S. 347 f.

Klammert man im Exponenten  $\frac{-\sigma_2^2}{2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}$  aus, ergibt dies

$$I_2 = -\exp(-r\tau_2) B_2 \frac{\sigma_2}{2\pi \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} \quad (\text{B.2.3})$$

$$\int_{\ln \frac{V_1^*}{V_0} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 - r\tau_1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1} \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r\tau_2}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_2} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2}{2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)} \left(u_2^2 - 2\frac{\sigma_1}{\sigma_2} u_1 u_2 + u_1^2\right)\right) du_2 du_1.$$

Benutzt man nochmals die Unabhängigkeitseigenschaft der Zufallvariablen des Wiener-Prozesses in der Form<sup>6</sup>

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}} = \rho_{12}$$

erhält man

$$I_2 = -\exp(-r\tau_2) B_2 \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \quad (\text{B.2.4})$$

$$\int_{\ln \frac{V_1^*}{V_0} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 - r\tau_1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1} \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r\tau_2}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2(1 - \rho_{12}^2)} (u_2^2 - 2\rho_{12} u_1 u_2 + u_1^2)\right) du_2 du_1.$$

Die Lösung des Integrals ist die Verteilung der Bivariaten Normalverteilung  $NV_2(, ,)$ .<sup>7</sup> Damit erhält man für  $I_2$

$$I_2 = -\exp(-r\tau_2) B_2 \quad (\text{B.2.5})$$

$$NV_2\left(\frac{-\ln \frac{V_1^*}{V_0} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1}, \frac{-\ln \frac{B_2}{V_0} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 + r\tau_2}{\sigma_2}, \rho_{12}\right).$$

Das verbleibende dritte Integral lässt sich wie folgt umschreiben:

$$I_3 = \exp(-r\tau_2) \int_{\ln \frac{V_1^*}{V_0}}^{+\infty} \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - x_1}^{+\infty} V_0 \exp(x_{\hat{\tau}} + x_1) f(x_{\hat{\tau}}) dx_{\hat{\tau}} f(x_1) dx_1.$$

<sup>6</sup>Vgl. dazu Anhang B.3.

<sup>7</sup>Dabei wird die Formel zur Bestimmung des rechtseitigen Quantils aus dem linksseitigen Quantil für eindimensionale Normalverteilungen, Vgl. **Bosch** (1992), S. 263 f., auf bivariate Verteilungen übertragen und auf das vorliegende Problem angewendet. Dass dies ohne Schwierigkeiten möglich ist, erkennt man, wenn man die Änderung der Integrationsgrenzen bereits oben, im symmetrischen Fall zweier unabhängiger Zufallsvariablen, durchführt.

Zur Beseitigung der Exponentialfunktionen vor der Gleichung werden analog zu Abschnitt 3.3.2 Substitutionen durchgeführt. Mit  $\hat{v}$  und  $v_1$  definiert wie  $u$  in Abschnitt 3.3.2 erhält man:

$$I_3 = \int_{\ln \frac{V_1^*}{V_0} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - r\tau_1}^{+\infty} \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r\tau_2}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1} \exp\left(-\frac{\hat{v}^2}{2}\right) d\hat{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) dv_1.$$

Führt man nun den Ausdruck wieder auf die Ausgangsform zurück, indem man folgende Substitutionen durchführt

$$\hat{v} = \frac{x_{\hat{\tau}} - \frac{1}{2}\sigma_{\hat{\tau}}^2 - r\tau_1}{\sigma_{\hat{\tau}}} \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{x_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - r\tau_1}{\sigma_1}$$

erhält man

$$I_3 = V_0 \frac{1}{2\pi\sigma_{\hat{\tau}}\sigma_1} \int_{\ln \frac{V_1^*}{V_0}}^{+\infty} \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - x_1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x_{\hat{\tau}} - \frac{1}{2}\sigma_{\hat{\tau}}^2 - r\tau_1)^2}{\sigma_{\hat{\tau}}^2}\right) dx_{\hat{\tau}} \exp\left(-\frac{(x_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - r\tau_1)^2}{\sigma_1^2}\right) dx_1.$$

Führt man wie beim zweiten Integral zuerst die Substitution  $x_{\hat{\tau}} = x_2 - x_1$  und für  $\sigma_{\hat{\tau}}^2 = \sigma_2^2 - \sigma_1^2$  durch, bedingt man aus und substituiert in einem zweiten Schritt  $\frac{x_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - r\tau_1}{\sigma_1}$  durch  $u_1$  und  $\frac{x_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r\tau_2}{\sigma_2}$  durch  $u_2$  erhält man:

$$I_3 = V_0 \frac{\sigma_2}{2\pi\sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} \quad (\text{B.2.6})$$

$$\int_{\ln \frac{V_1^*}{V_0} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - r\tau_1}^{+\infty} \int_{\ln \frac{B_2}{V_0} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r\tau_2}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\sigma_2 u_2 - \sigma_1 u_1)^2}{2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)} - \frac{(\sigma_1 u_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) du_2 du_1.$$

Dies entspricht dem zweiten Integral mit modifizierten Integrationsgrenzen. Daraus erhält man die Lösung des dritten Integrals analog zu der des zweiten:

$$I_3 = V_0 N V_2 \left( \frac{-\ln \frac{V_1^*}{V_0} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + r\tau_1}{\sigma_1}, \frac{-\ln \frac{B_2}{V_0} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + r\tau_2}{\sigma_2}, \rho_{12} \right). \quad (\text{B.2.7})$$

Die drei Integralterme lassen sich dann zum Endergebnis zusammenfassen:

$$C_{\tau_0} = I_3 + I_2 + I_1.$$

## B.3 Anhang

Der Korrelationskoeffizient  $\rho_{12}$  bestimmt sich aus der Kovarianzfunktion des Standard Wiener-Prozesse  $w_t$ . Die Kovarianz zwischen  $x_1$  und  $x_2$  wird bestimmt durch:

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \text{Cov}(\mu\tau_1 + \sigma w_1, \mu\tau_2 + \sigma w_2) = \sigma^2 \text{Cov}(w_1, w_2)$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 E(w_1 w_2) &= \sigma^2 E((w_2 - w_1)w_1 + w_1^2) = \\ &\sigma^2 E((w_2 - w_1)w_1) + \sigma^2 E(w_1^2).\end{aligned}$$

Mit der charakterisierenden Eigenschaft des Wiener-Prozesses

$$\text{Cov}((w_2 - w_1), w_1) = E((w_2 - w_1)w_1) = 0$$

folgt

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \sigma^2 E(w_1^2) = \sigma^2 \tau_1 = \sigma_1^2,$$

wobei an dieser Stelle die Regeln zur Varianz von Zufallsvariablen eingehen, die u.i.v. sind. Für den Korrelationskoeffizienten ergibt sich

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_2}}.$$

## B.4 Anhang

Ausgangspunkt ist Gleichung (3.4.12):

$$C_0 = \exp(-r\tau_1) \int_{x^c}^{+\infty} \int_{\ln \frac{V_A}{V_B} + x_A}^{+\infty} (V_B \exp(x_B) - V_A \exp(x_A)) \quad (\text{B.4.1})$$

$$f(x_B | x_A) dx_B f(x_A) dx_A + \exp(-r\tau_1) \int_{x^c}^{+\infty} (V_A \exp(x_A) - B_e) f(x_A) dx_A.$$

Der zweite Summand entspricht der bekannten Integration nach *Black/Scholes* und *Merton* und man erhält somit:

$$V_A NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A} \right) - B_e \exp(-r\tau_1) NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A} \right). \quad (\text{B.4.2})$$

Führt man nun beim zweiten Term des ersten Summanden aus Gleichung (B.4.1) die unabhängigen Zufallsvariablen wie in (3.4.6) zu

$$u_A = \frac{x_A + \frac{1}{2} \sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A}$$

$$u_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{AB}^2}} \left( \frac{x_B + \frac{1}{2} \sigma_B^2 - r\tau_1}{\sigma_B} - \rho_{AB} \frac{x_A + \frac{1}{2} \sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A} \right)$$

ein, erhält man

$$\exp(-r\tau_1) \int_{\frac{x^c + \frac{1}{2} \sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A}}^{+\infty} \int_{g_B^c}^{+\infty} -V_A \exp(\sigma_A u_A - \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1) \\ \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{u_B^2}{2}) \exp(-\frac{u_A^2}{2}) du_B du_A,$$

wobei  $g_B^c$  als

$$g_B^c = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{AB}^2}} \left( \frac{\ln \frac{V_A}{V_B} + \sigma_A u_A - \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1 + \frac{1}{2} \sigma_B^2 - r\tau_1}{\sigma_B} - \rho_{AB} u_A \right)$$

definiert ist. Dies ergibt:

$$\int_{\frac{x^c + \frac{1}{2} \sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A}}^{+\infty} \int_{g_B^c}^{+\infty} -V_A \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{u_B^2}{2}) \exp(-\frac{(u_A - \sigma_A)^2}{2}) du_B du_A = \\ \int_{\frac{x^c - \frac{1}{2} \sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A}}^{+\infty} \int_{g_B^{*c}}^{+\infty} -V_A \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{u_B^2}{2}) \exp(-\frac{u_A^{*2}}{2}) du_B du_A^*,$$

wobei

$$u_A^* = u_A - \sigma_A$$

und

$$g_B^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{AB}^2}}$$

$$\left( \frac{\ln \frac{V_A}{V_B} + \sigma_A u_A^* + \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1 + \frac{1}{2} \sigma_B^2 - r\tau_1}{\sigma_B} - \rho_{AB}(u_A^* + \sigma_A) \right)$$

gilt. Nun kann die Rücktransformation zu den Ausgangsvariablen

$$v_A = u_A^* \sigma_A$$

und

$$v_B = \left( \sqrt{1 - \rho_{AB}^2} u_B + \rho_{AB} \frac{v_A}{\sigma_A} \right) \sigma_B$$

durchgeführt werden:

$$\int_{x^e - \frac{1}{2} \sigma_A^2 - r\tau_1}^{+\infty} \int_{\ln \frac{V_A}{V_B} + v_A + \frac{1}{2} \sigma_{AB}^2}^{+\infty} -V_A \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_{AB}^2} \sigma_A \sigma_B} \quad (B.4.3)$$

$$\exp \left( \frac{1}{1 - \rho_{AB}^2} \left( \frac{v_A^2}{2\sigma_A^2} - \frac{\rho_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} v_A v_B + \frac{v_B^2}{2\sigma_B^2} \right) \right) dv_B dv_A$$

mit

$$\sigma_{AB} = \sigma_B^2 + \sigma_A^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B.$$

Um die untere Integrationsgrenze frei von  $v_A$  zu machen, wird die Differenzvariable

$$v_B - v_A = \hat{v}$$

eingeführt. Mit dieser Transformation ändert sich die Verteilungsfunktion

$$\int_{\ln \frac{B_A}{V_A} - \frac{1}{2} \sigma_A^2 - r\tau_1}^{+\infty} \int_{\ln \frac{V_A}{V_B} + \frac{1}{2} \sigma_{AB}^2}^{+\infty} -V_A \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_{AB}^2} \sigma_A \sigma_B}$$

$$\exp \left( \frac{1}{1 - \rho_{AB}^2} \left( \frac{v_A^2}{2\sigma_A^2} - \frac{\rho_{ABA}}{\sigma_A \sigma_{AB}} v_A \hat{v} + \frac{\hat{v}^2}{2\sigma_{AB}^2} \right) \right) d\hat{v} dv_A,$$

die eine Varianz von

$$\sigma_{AB} = \text{Var}(v_B - v_A) = \sigma_B^2 + \sigma_A^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$

und eine Kovarianz von

$$\text{Cov}(v_B - v_A, v_A) = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B - \sigma_A^2$$



besitzt. Ihr Korrelationskoeffizient berechnet sich zu

$$\rho_{ABA} = \frac{\rho_{AB}\sigma_B - \sigma_A}{\sigma_{AB}}.$$

Nach der Integration ergibt sich unter Verwendung der bivariaten Normalverteilung  $NV_2(\cdot)$

$$-V_A NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} - \frac{1}{2}\sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, \rho_{ABA} \right).$$

Der zweite Term des ersten Summanden aus (B.4.1) wird analog behandelt. Damit erhält man

$$\begin{aligned} C_0 = & V_B NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{1}{2}\sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, \rho_{ABA} \right) - \\ & V_A NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} - \frac{1}{2}\sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, \rho_{ABA} \right) + \\ & V_A NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A} \right) - B_e \exp(-r\tau_1) NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A} \right), \end{aligned} \quad (B.4.4)$$

wobei

$$\sigma_{AB}^2 = \sigma_A^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2,$$

und

$$\rho_{ABA} = \frac{\rho_{AB}\sigma_B - \sigma_A}{\sigma_{AB}}$$

gilt. Die beiden Terme bei  $V_A$  können unter Verwendung der Formel von Selby/Hodges<sup>8</sup> zusammengefasst werden zu:

$$\begin{aligned} C_0 = & V_B NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{1}{2}\sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, \rho_{ABA} \right) - \\ & V_A NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} - \frac{1}{2}\sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, \rho_{ABA} \right) + \\ & V_A \left( 1 - NV_1 \left( \frac{-\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A} \right) \right) - \\ & B_e \exp(-r\tau_1) NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A} \right) = \end{aligned} \quad (B.4.5)$$

<sup>8</sup>Vgl. Selby/Hodges (1987), S. 349.

$$\begin{aligned}
&= V_B NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{1}{2} \sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, \rho_{ABA} \right) + \\
&V_A NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_A}{V_B} + \frac{1}{2} \sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, -\rho_{ABA} \right) + \\
&-B_e \exp(-r\tau_1) NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2} \sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A} \right).
\end{aligned} \tag{B.4.6}$$

## B.5 Anhang

Zur Zusammenfassung werden die Terme koeffizientenweise betrachtet. Für den Koeffizienten  $B_e$  ergibt sich

$$-B_e \exp(-r\tau_1) NV_1 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A} \right) \\ -B_e \exp(-r\tau_1) NV_2 \left( \frac{-\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_B^2 + r\tau_1}{\sigma_B}, -\rho_{AB} \right).$$

Mit der Formel von *Selby/Hodges*<sup>9</sup> ergibt dies:

$$-B_e \exp(-r\tau_1) \left( 1 - NV_2 \left( \frac{-\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{-\ln \frac{V_B}{B_e} + \frac{1}{2}\sigma_B^2 - r\tau_1}{\sigma_B}, \rho_{AB} \right) \right).$$

Der Koeffizient bei  $V_A$  ist bereits vorhanden, so dass nur noch der Koeffizient bei  $V_B$  verändert werden muss. Für den Koeffizient bei  $V_B$  ergibt dies

$$V_B NV_2 \left( \frac{-\ln \frac{V_A}{B_e} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 - r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{B_e} + \frac{1}{2}\sigma_B^2 + r\tau_1}{\sigma_B}, -\rho_{AB} \right) + \\ V_B NV_2 \left( \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A}, \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{1}{2}\sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, \rho_{ABA} \right).$$

Schreibt man diese Terme mit Hilfe von Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Ereignisse  $Q(\{\})$

$$V_B Q \left( \left\{ x_A > \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A} \right\} \cap \left\{ x_B > \frac{-\ln \frac{V_B}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_B^2 - r\tau_1}{\sigma_B} \right\} \right) + \\ V_B Q \left( \left\{ x_A < \frac{\ln \frac{V_A}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_A^2 + r\tau_1}{\sigma_A} \right\} \cap \left\{ x_B - x_A < \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{1}{2}\sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}} \right\} \right),$$

erkennt man, dass die Terme unter Anwendung der Bayesschen Formel<sup>10</sup> zusammengefasst werden können zu

$$V_B Q \left( \left\{ x_B > \frac{-\ln \frac{V_B}{B_e} - \frac{1}{2}\sigma_B^2 - r\tau_1}{\sigma_B} \right\} \cap \left\{ x_B - x_A < \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{1}{2}\sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}} \right\} \right) =$$

<sup>9</sup>Vgl. *Selby/Hodges* (1987), S. 349.

<sup>10</sup>Vgl. *Bauer* (1991), S. 11.

$$V_B N V_2 \left( \frac{\ln \frac{V_B}{B_*} + \frac{1}{2} \sigma_B^2 + r \tau_1}{\sigma_B}, \frac{\ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{1}{2} \sigma_{AB}^2}{\sigma_{AB}}, -\rho_{ABB} \right),$$

wobei

$$\rho_{ABB} = \frac{\rho_{AB} \sigma_A - \sigma_B}{\sigma_{AB}}$$

beträgt. Alle drei Terme zusammen ergeben dann das Resultat aus (3.4.14).

# Anhang C

## Anhang zu Abschnitt 4

### C.1 Anhang

Lévy-Prozesse lassen sich durch ihre charakteristischen Randverteilungsfunktionen darstellen. Hier ist eine Auswahl der wichtigsten Vertreter aufgeführt:

Prozess	Parameter	Charakteristische Funktion der Randverteilung
Wiener-Prozess	$NV(\mu, \sigma^2)$	$\exp(i\mu\eta - \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2)$
Poisson-Prozess	$PO(\lambda)$	$\exp(\lambda(\exp(i\eta) - 1))$
Normal Inverser Gauss-Prozess	$NIG(\alpha, \beta, \delta)$	$\exp(-t\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + i\eta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}))$
Varianz Gamma-Prozess	$VG(\alpha, \beta, \gamma)$	$(1 - i\beta\gamma\eta + \frac{1}{2}\alpha^2\beta\eta^2)^{-\frac{1}{\beta}}$
Hyperbolischer Prozess	$HYP(\alpha, \beta, \delta)$	$\sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + i\eta)^2}} \frac{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + i\eta)^2})}{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$
Mixed Meixner-Prozess	$MM(\alpha, \beta, \delta)$	$\frac{\cos(0.5\beta)}{\cosh(0.5(\alpha\eta - i\beta)^{2\delta})}$

Tabelle C.1: Charakteristische Randverteilungsfunktionen von Lévy-Prozessen

$K_1()$  ist die 1. Modifizierte Besselfunktion.

## C.2 Anhang

Ausgangspunkt ist Gleichung (4.3.2):

$$dQ_t = \exp(\theta Y_t - c(\theta, t)) dP_t.$$

$c(\theta, t)$  aus Gleichung (4.3.5) eingesetzt und Multiplikation mit  $\exp(\iota Y_t \eta)$  ergibt

$$\exp(\iota Y_t \eta) dQ_t = \exp(\iota Y_t \eta + \theta Y_t) \exp(t \Phi_P(-\iota \theta)) dP_t.$$

Einfügen von  $-\iota^2 = 1$  und Integration auf beiden Seiten nach dem jeweiligen Maß führt zu:

$$\int \exp(\iota Y_t \eta) dQ_t = \int \exp(\iota Y_t \eta - \iota^2 \theta Y_t) dP_t \exp(t \Phi_P(-\iota \theta)).$$

Damit folgt Gleichung (4.3.7)

$$\Phi_Q(\eta) = \Phi_P(\eta - \iota \theta) - \Phi_P(-\iota \theta).$$

Zur Bestimmung der Esscher-Transformierten einer geometrischen Brownschen Bewegung bietet es sich an, zunächst den transformierten Lévy-Exponenten für irgendein  $\theta$  zu bestimmen. Ausgehend von Gleichung (4.3.7) erhält man für den Lévy-Exponenten unter  $Q$

$$\Phi_Q(\eta) = -\iota(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(\eta - \iota\theta) + \frac{1}{2}\sigma^2(\eta - \iota\theta)^2 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2.$$

Nach diversen Operationen erhält man

$$-\iota\mu\eta + \iota\frac{1}{2}\sigma^2\eta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2 - \iota\sigma^2\eta\theta.$$

Setzt man  $\theta$  aus Gleichung (4.3.8) ein und vereinfacht wiederum, erhält man Gleichung (4.3.9).

## C.3 Anhang

Aus der charakteristischen Funktion der Randverteilung des Normal Inversen Gauss-Prozesses

$$\exp(-t\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota\eta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}))$$

lässt sich durch einsetzen in Gleichung (4.3.6) folgende Darstellung ableiten

$$\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota(-\iota(1 + \theta)))^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) +$$

$$\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota(-\iota\theta))^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) - r = 0.$$

Nach einigen Umformungen erhält man:

$$r = \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta + 1)^2}). \quad (\text{C.3.1})$$

Daraus lässt sich dann ein entsprechendes  $\theta$  bestimmen. Für den neuen Prozess setzt man die charakteristischen Funktion der Randverteilung des Normal Inversen Gauss-Prozesses

$$\exp(-t\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota\eta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}))$$

in Gleichung (4.3.7) mit dem neuen  $\theta$  ein, so dass

$$\Phi_Q(\eta) = \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota(\eta - \iota\theta))^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) -$$

$$\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota(-\iota\theta))^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$$

gilt. Nach einigen Umformungen erhält man

$$\Phi_Q(\eta) = \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta + \iota\eta)^2} - \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2}), \quad (\text{C.3.2})$$

was einer neuen charakteristischen Funktion der Randverteilung des Normal Inversen Gauss-Prozesses mit verändertem  $\beta$  entspricht.





# Literaturverzeichnis

- [1] **Arnold, Ludwig (1973):**  
Stochastische Differentialgleichungen, Oldenbourg, München und Wien.
- [2] **Bachelier, Louis (1900):**  
Théorie de la Spéculation,  
in: Annales Scientifiques de L'Ecole Normale Supérieure, S. 21-86.
- [3] **Bailey, Warren und Stulz, René (1989):**  
The Pricing of Stock Index Options in a General Equilibrium Model,  
in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, 24, S. 1-12.
- [4] **Bakshi, Gurdip und Madan, Dilip (2000):**  
Spanning and Derivative Security Valuation,  
in: Journal of Financial Economics, 55, S. 205-238.
- [5] **Ballwieser, Wolfgang (1998):**  
Unternehmensbewertung mit Discounted Cash Flow-Verfahren,  
in: Die Wirtschaftsprüfung, 51, S. 81-92.
- [6] **Bamberg, Günter und Dorfleitner, Gregor (2001):**  
Is the Traditional Capital Market Theory Consistent with Fat-tailed Log Returns?,  
in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 72, S. 865-878.
- [7] **Barth, Wolfgang (1998):**  
Indexanleihen: Ökonomisch rational und finanzmarktpolitisch geboten,  
in: Die Bank, 38, S. 865-878.
- [8] **Bauer, Heinz (1991):**  
Wahrscheinlichkeitstheorie, 4. Aufl., de Gruyter, Berlin u. New York.
- [9] **Berg, Lothar (1972):**  
Operatorenrechnung, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

- [10] **Bertoin, Jean (1996):**  
Lévy Processes, Cambridge University Press, Cambridge.
- [11] **Beth, Thomas (1984):**  
Verfahren der schnellen Fourier-Transformation, Teubner, Stuttgart.
- [12] **Black, Fischer (1975):**  
Fact and Fantasy in the Use of Options,  
in: Financial Analysts Journal, 31, S. 36-72.
- [13] **Black, Fischer und Scholes, Myron (1973):**  
The Pricing of Options and Corporate Liabilities,  
in: Journal of Political Economy, 81, S. 637-659.
- [14] **Bosch, Karl (1992):**  
Statistik-Taschenbuch, Oldenbourg, München u. Wien.
- [15] **Boyarchenko, Svetlana und Levendorskii, Sergei (2001):**  
Option Pricing and Hedging under Regular Lévy Processes of Exponential Type,  
in: Kohlmann, Michael und Tang, Shanjian (Hrsg.): Mathematical Finance, Birkhäuser, Basel et al., S. 121-130.
- [16] **Boyarchenko, Svetlana und Levendorskii, Sergei (2002):**  
Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory, World Scientific Publications, New Jersey et al.
- [17] **Boyarchenko, Svetlana und Levendorskii, Sergei (2003):**  
Generalisations of the Black-Scholes Equation for Truncated Lévy-Processes,  
Arbeitspapier University of Pennsylvania und Staatliche Akademie Rostow.
- [18] **Boyle, Phelim (1988):**  
A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables.  
in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, 23, S. 1-12.
- [19] **Boyle, Phelim, Evnine, Jeremy und Gibbs, Stephen (1988):**  
Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims,  
in: Review of Financial Studies, 2, S. 241-250.
- [20] **Boyle, Phelim und Lau, Sok (1994):**  
Bumping Up against the Barrier with the Binomial Method,  
in: Journal of Derivatives, 2, S. 6-14.

- [21] **Boyle, Phelim und Tse, Yiu (1990):**  
An Algorithm for Computing Values of Options on the Maximum and Minimum of Several Assets,  
in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25, S. 215-227.
- [22] **Brechmann, Arnd (2002):**  
Strukturierte Produkte, Deutscher Sparkassenverlag, Stuttgart.
- [23] **Brunner, Bernhard (2004):**  
Marktgerechte Bewertung von Optionen, Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden.
- [24] **Brunner, Bernhard und Hafner, Reinhold (2003):**  
Arbitrage-free Estimation of the Risk-Neutral Density from the Implied Volatility Smile,  
in: Journal of Computational Finance, 7, S. 75-106.
- [25] **Bühlmann, Hans, Delbaen, Freddy, Embrechts, Paul und Shiryaev, Albert (1996):**  
No-arbitrage, Change of Measure and Conditional Esscher Transform,  
in: CWI Quarterly, 9, S. 291-317.
- [26] **Campbell, John, Lo, Andrew und MacKinley, Craig (1997):**  
Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press, Princeton.
- [27] **Carr, Peter und Madan, Dilip (1998):**  
Determining Volatility Surfaces and Option Values from an Implied Volatility Smile,  
Arbeitspapier New York University.
- [28] **Carr, Peter und Madan, Dilip (1999):**  
Option Valuation Using the Fast Fourier Transform,  
in: Journal of Computational Finance, 2, S. 61-72.
- [29] **Chan, Terence (1999):**  
Pricing Contingent Claims on Stocks Driven by Lévy Processes,  
in: Annals of Applied Probability, 9, S. 504-528.
- [30] **Chen, Ren-Raw, Chung, San-Lin und Yang, Tyler (2002):**  
Option Pricing in a Multi-Asset, Complete Market Economy,  
in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, 37, S. 649-666.
- [31] **Cheng, Russel (1998):**  
Random Variate Generation,  
in: Banks, Jerry (Hrsg.): Handbook of Simulation, John Wiley & Sons, New York et al., S. 139-172.

- [32] **Cheuk, Terry und Vorst, Tom (1996):**  
Complex Barrier Options,  
in: Journal of Derivatives, 4 , S. 8-22.
- [33] **Cheyette, Oren (1990):**  
Pricing Options on Multiple Assets,  
in: Advances in Futures and Options Research, 4 , S. 69-81.
- [34] **Chriss, Neil (1997):**  
Black-Scholes and Beyond, McGraw-Hill, New York et al.
- [35] **Copeland, Thomas und Weston, Fred (1988):**  
Financial Theory and Corporate Policy, 2. Aufl., Addison-Wesley,  
Reading.
- [36] **Cortazar, Gonzalo und Schwartz, Eduardo (1993):**  
A Compound Option Model of Production and Intermediate Inventories,  
in: Journal of Business, 66, S. 517-540.
- [37] **Cox, John und Ross, Stephen (1976):**  
The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes,  
in: Journal of Financial Economics, 3, S. 145-166.
- [38] **Cox, John, Ross, Stephen and Rubinstein, Mark (1979):**  
Option Pricing: A Simplified Approach,  
in: Journal of Financial Economics, 7, S. 229-263.
- [39] **Dothan, Michael (1990):**  
Prices in Financial Markets, Oxford University Press, New York.
- [40] **Duffie, Darrel und Huang, Chi-Fu (1985):**  
Implementing Arrow-Debreu Equilibria by Continuous Trading of  
Few Long-Lived Securities,  
in: Econometrica, 6, S. 1337-1356.
- [41] **Eberlein, Ernst und Jacod, Jean (1997):**  
On the Range of Option Prices,  
in: Finance and Stochastics, 1, S. 131-140.
- [42] **Ekvall, Niklas (1996):**  
A Lattice Approach for Pricing of Multivariate Contingent Claims.  
in: European Journal of Operational Research, 91, S. 214-228.
- [43] **Elstrodt, Jürgen (1996):**  
Maß- und Integrationstheorie, Springer, Berlin et al.

- [44] **Ericsson, Jan und Reneby, Joel (1998):**  
A Framework for Valuing Corporate Securities,  
in: Journal of Applied Mathematical Finance, 5, S. 143-164.
- [45] **Esscher, Fredrik (1932):**  
On the Probability Function in the Collective Theory of Risk,  
in: Skandinavisk Aktuarietidskrift, 15, S. 175-195.
- [46] **Fahrmeir, Ludwig, Kaufmann, Heinz und Ost, Friedemann (1981):**  
Stochastische Prozesse, Hanser, München u. Wien.
- [47] **Fama, Eugene (1963):**  
Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis,  
in: Journal of Business, 36, S. 420-429.
- [48] **Fama, Eugene (1965):**  
The Behavior of Stock-Market Prices,  
in: Journal of Business, 38, S. 34-105.
- [49] **Figlewski, Stephen und Wang, Xiaozu (2000):**  
Is the „Leverage Effect“ a Leverage Effect?,  
Arbeitspapier New York University.
- [50] **Fischer, Edwin und Keber, Christian (1999):**  
Die Bewertung von Kreditgarantien mittels Hyperoptionen,  
in: OR-Spektrum, 22, S. 461-489.
- [51] **Fischer, Edwin, Keber, Christian und Maringer, Dieter (2000):**  
Die Bewertung von Beteiligungsgarantien zur Förderung von Risikokapital,  
in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Sonderheft 3/99, S. 131-149.
- [52] **Fischer, Edwin, Keber, Christian und Schuster, Matthias (2000):**  
Fallstudie aus Financial Engineering: Darstellung, Bewertung und Analyse des 6,4% Hypobank-Knock-In-Pfandbriefs 1999-2004,  
in: Journal für Betriebswirtschaft, 50, S. 106-118.
- [53] **Föllmer, Hans und Schweizer, Martin (1991):**  
Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information,  
in: Davis, Mark und Elliott, Robert (Hrsg.): Applied Stochastic Analysis, Gordon u. Breach, New York et al., S. 389-414.

- [54] **Fujiwara, Tsukasa und Miyahara, Yoshio (2003):**  
The Minimal Entropy Martingale Measures for Geometric Lévy Processes,  
in: Finance and Stochastics, 7, S. 509-531.
- [55] **Gerber, Hans und Shiu, Elias (1994a):**  
Option Pricing by Esscher Transformation,  
in: Transactions of the Society of Actuaries, 46, S. 99-140.
- [56] **Gerber, Hans und Shiu, Elias (1994b):**  
Review of Discussion,  
zu: Option Pricing by Esscher Transformation,  
in: Transactions of the Society of Actuaries, 46, S. 173-191.
- [57] **Geske, Robert (1977):**  
The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options,  
in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, 12, S. 541-552.
- [58] **Geske, Robert (1979):**  
The Valuation of Compound Options,  
in: Journal of Financial Economics, 7, S. 63-81.
- [59] **Geske, Robert und Johnson, Herb (1984):**  
The American Put Option Valued Analytically,  
in: Journal of Finance, 39, S. 1511-1524.
- [60] **Golan, Amos, Judge, George und Miller, Douglas (1996):**  
Maximum Entropy Econometrics, John Wiley u. Sons, Chichester.
- [61] **Goll, Thomas und Rüschendorf, Ludger (2001):**  
Minimax and Minimal Distance Martingale Measures and their Relationship to Portfolio Optimization,  
in: Finance and Stochastics, 5, S. 557-581.
- [62] **Griffiths, William, Hill, Rufus und Judge, George (1993):**  
Learning and Practising Econometrics, John Wiley u. Sons, New York et al.
- [63] **Grigelionis, Bronius (1999):**  
Processes of Meixner Type,  
in: Lithuanian Mathematics Journal, 39, S. 33-41.
- [64] **Grünwald, Leonhard (1980):**  
Optionsmarkt und Kapitalmarkteffizienz, Florentz, München.
- [65] **Hämmerlin, Günther und Hoffmann, Karl-Heinz (1988):**  
Numerische Mathematik, 4. Auflage, Springer, Berlin et al.

- [66] **Hamada, Robert (1969):**  
Portfolio Analysis, Market Equilibrium and Corporate Finance,  
in: Journal of Finance, 24, S. 13-31.
- [67] **Hamilton, James (1994):**  
Time Series Analysis, Princeton University Press, Princeton.
- [68] **Harrison, Michael und Kreps, David (1979):**  
Martingale and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets,  
in: Journal of Economic Theory, 20, S. 381-408.
- [69] **He, Hua (1990):**  
Convergence for Discrete- to Continuous-Time Contingent Claims  
Prices,  
in: Review of Financial Studies, 3, S. 523-547.
- [70] **Heath, David, Jarrow, Robert und Morton, Andrew (1990):**  
Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates,  
in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25, S. 419-440.
- [71] **Herstein, Israel (1978):**  
Algebra, Physik-Verlag, Weinheim.
- [72] **Hommel, Ulrich und Müller, Jürgen (2000):**  
Tauschoptionen: Kernbausteine realoptionsbasierter Investitionsrechnung,  
in: Finanzbetrieb, 2 , S. 72-77.
- [73] **Hommel, Ulrich und Pritsch, Gunnar (1999):**  
Marktorientierte Investitionsbewertung mit dem Realoptionsansatz,  
in: Finanzmarkt und Portfolio Management, 13 , S. 121-144.
- [74] **Hull, John (2003):**  
Options, Futures and other Derivative Securities , 5. Aufl., Prentice  
Hall. New Jersey et al.
- [75] **Hull, John und White, Alan (1988):**  
An Overview of Contingent Claim Pricing,  
in: Canadian Journal of Administrative Sciences, 12 , S. 55-61.
- [76] **Irle, Albrecht (1998):**  
Finanzmathematik, Teubner, Stuttgart.
- [77] **Jacob, Niels (1996):**  
Pseudo-differential Operators and Markov Processes, Akademie Verlag,  
Berlin.

- [78] **Jacod, Jean und Shiryaev, Albert (2003):**  
Limit Theorems for Stochastic Processes, 2. Aufl., Springer, Berlin et al.
- [79] **Jäger, Joachim (1980):**  
Elementare Topologie, Schöningh, Paderborn et al.
- [80] **Jarque, Carlos und Bera, Anil (1987):**  
A Test for Normality of Observations and Regression Residuals.  
in: International Statistical Review, 55, S. 163-172.
- [81] **Jarrow, Robert und Wiggins, James (1989):**  
Option Pricing and Implicit Volatilities,  
in: Journal of Economic Surveys, 3, S. 59-81.
- [82] **Jorion, Philippe (2001):**  
Value at Risk, 2. Aufl., McGraw-Hill, New York.
- [83] **Kallsen, Jan (1998):**  
Semimartingale Modelling in Finance, Dissertation Universität Freiburg, Freiburg i. Br.
- [84] **Kallsen, Jan und Shiryaev, Albert (2002):**  
The Cumulant Process and Esscher's Change of Measure,  
in: Finance and Stochastics, 6, S. 397-428.
- [85] **Keller, Ulrich (1997):**  
Realistic Modelling of Financial Derivatives, Dissertation Universität Freiburg, Freiburg i. Br.
- [86] **Kilka, Michael (1995):**  
Realoptionen, Lang, Frankfurt a. M.
- [87] **Kobel, Michael (1996):**  
Bewertung multivariater Derivate, VVW, Karlsruhe.
- [88] **Koch, Christian (2001):**  
Modell der binomialen Bewertung allgemeiner Tauschoptionen,  
in: Finanzbetrieb, 3, S. 85-88.
- [89] **Koponen, Ismo (1995):**  
Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Lévy Flights towards the Gaussian Stochastic Process,  
in: Physical Review, 52, S. 1197-1199.
- [90] **Kowalsky, Hans-Joachim und Michler, Gerhard (1998):**  
Lineare Algebra, 11. Aufl., de Gruyter, Berlin u. New York.



- [91] **Kraft, Holger und Trautmann, Siegfried (2001):**  
Aktuelle Finanzderivate für Privatanleger,  
in: Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 30, S. 539-542.
- [92] **Krämer, Walter (2002):**  
Statistische Besonderheiten von Finanzzeitreihen,  
in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 222, S. 210-229.
- [93] **Krämer, Walter und Runde, Ralf (2000):**  
Peaks and Tails - What Distinguished Financial Data?,  
in: Empirical Economics, 25, S. 665-671.
- [94] **Kruschwitz, Lutz (1995):**  
Finanzierung und Investition, de Gruyter, Berlin u. New York.
- [95] **Lajeri-Chaherli, Fatma (2002):**  
A Note on the Valuation of Compound Options,  
in: Journal of Futures Markets, 22, S. 1103-1115.
- [96] **Leon, Jorge, Sole, Josep, Utzet, Frederic und Vives, Josep (2002):**  
On Lévy Processes, Mallivian Calculus and Market Models with Jumps,  
in: Finance and Stochastics, 6, S. 197-225.
- [97] **Lévy, Paul (1937):**  
Théories de L'Addition des Variables Aléatoires. Gauthier-Villars, Paris.
- [98] **Löhr, Dirk (1999):**  
Wertorientierung der Unternehmensführung mittelständischer Familienunternehmen durch Schaffung von Realoptionen,  
in: Die Betriebswirtschaft, 59, S. 654-663.
- [99] **Longstaff, Francis (1995):**  
Option Pricing and the Martingale Restriction,  
in: Review of Financial Studies, 8, S. 1091-1124.
- [100] **Lucke, Claus (2001):**  
Investitionsprojekte mit mehreren Realoptionen, Verlag Wissenschaft und Praxis, Sternenfels.
- [101] **Lyden, Scott (1996):**  
A Reference Check: A Bibliography of Exotic Options Models,  
in: Journal of Derivatives, 4, S. 79-91.

- [102] **Madan, Dilip, Carr, Peter und Chang, Eric (1998):**  
The Variance Gamma Process and Option Pricing,  
in: *European Finance Review*, 2, S. 79-105.
- [103] **Madan, Dilip und Milne, Frank (1991):**  
Option Pricing with V. G. Martingale Components,  
in: *Mathematical Finance*, 1, S. 39-55.
- [104] **Madan, Dilip, Milne, Frank und Shefrin, Hersh (1989):**  
The Multinomial Option Pricing Model and its Brownian and Poisson Limits,  
in: *Review of Financial Studies*, 2, S. 251-265.
- [105] **Mandelbrot, Benoit (1967):**  
The Variation of Certain Speculative Prices,  
in: *Journal of Business*, 36, S. 394-419.
- [106] **Margrabe, William (1978):**  
The Value of an Option to Exchange one Asset for Another,  
in: *Journal of Finance*, 33, S. 177-186.
- [107] **Matacz, Andrew (1997):**  
Financial Modelling and Option Theory with Truncated Lévy Process,  
in: *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3, S. 143-160.
- [108] **Meise, Florian (1998):**  
Realloptionen als Investitionskalkül, Oldenbourg, München u. Wien.
- [109] **Merton, Robert (1973):**  
The Theory of Rational Option Pricing,  
in: *Bell Journal of Economics and Management Science*, 29, S. 141-183.
- [110] **Merton, Robert (1976):**  
Option Prices when Underlying Stock Returns are Discontinuous,  
in: *Journal of Financial Economics*, 3, S. 125-144.
- [111] **Miller, Jarrott (1975):**  
Option Trading, Henry Reguery, Chicago.
- [112] **Musiela, Marek und Rutkowski, Marek (1997):**  
Martingale Methods in Financial Modelling. Springer, Heidelberg et al.

- [113] **Naik, Vasanttilak und Lee, Moon (1990):**  
General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns,  
in: Review of Financial Studies, 3, S. 493-521.
- [114] **Niemeyer, Horst und Wermuth, Edgar (1987):**  
Lineare Algebra - analytische und numerische Behandlung, Vieweg, Braunschweig et al.
- [115] **Nualart, David und Schoutens, Wim (2001):**  
Backward Stochastic Differential Equations and Feynman-Kac Formula for Lévy Processes with Applications in Finance,  
in: Bernoulli, 7, S. 761-776.
- [116] **Øksendal, Bernt (1998):**  
Stochastic Differential Equations, 5. Aufl., Springer, Heidelberg et al.
- [117] **Osborne, M.F.M. (1959):**  
Brownian Motion in the Stock Market,  
in: Operations Research, 7, S. 145-173.
- [118] **Paul, Wolfgang und Baschnagel, Jörg (1999):**  
Stochastic Processes, Springer, Berlin et al.
- [119] **Perridon, Louis und Steiner, Manfred (2003):**  
Finanzwirtschaft der Unternehmung, 12. Aufl., Vahlen, München.
- [120] **Querenburg, Boto von (2001):**  
Mengentheoretische Topologie, 3. Aufl., Springer, Berlin et al.
- [121] **Rachev, Svetlosar und Mittnik, Stefan (2000):**  
Stable Paretian Models in Finance, John Wiley u. Sons, Chichester.
- [122] **Raible, Sebastian (2000):**  
Lévy Processes in Finance, Dissertation Universität Freiburg, Freiburg i. Br.
- [123] **Rathgeber, Andreas (2004):**  
Compound Options - Extended Insights through a Martingale Representation,  
Arbeitspapier Universität Augsburg.
- [124] **Rathgeber, Andreas und Wagner, Marc (2001):**  
Realloptionen bei Immobilien: Wert- und Risikomanagement,  
in: Bach, Hansjörg et al. (Hrsg.): Facility Management, VDE, Berlin, S. 493-504.

- [125] **Rendleman, Richard und Bartter, Brit (1979):**  
Two-State Option Pricing,  
in: Journal of Finance, 34, S. 1093-1110.
- [126] **Rich, Don (1994):**  
The Mathematical Foundations of Barrier Option-Pricing Theory,  
in: Advances in Futures and Options Research, 7, S. 267-311.
- [127] **Rinne, Horst (2003):**  
Taschenbuch der Statistik, 3. Aufl., Harri Deutsch, Frankfurt a.M.
- [128] **Ritchken, Peter (1995):**  
On Pricing Barrier Options,  
in: Journal of Derivatives, 3, S. 19-28.
- [129] **Roll, Richard (1977):**  
An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends.  
in: Journal of Financial Economics, 5, S. 251-258.
- [130] **Rubinstein, Mark (1976):**  
The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options,  
in: Bell Journal of Economics and Management Science, 7, S. 407-425.
- [131] **Rubinstein, Mark (1991a):**  
Double Trouble,  
in: Risk, 4, S. 73.
- [132] **Rubinstein, Mark (1991b):**  
Somewhere over the Rainbow,  
in: Risk, 4, S. 63-66.
- [133] **Rubinstein, Mark (1994):**  
Return to Oz,  
in: Risk, 7, S. 67-71.
- [134] **Ruwe, Mark (2002):**  
Ein neues grafisches und formales Verfahren zur Überprüfung der Normalverteilungsannahmen, Eul, Lohmar u. Köln.
- [135] **Samuelson, Paul (1965a):**  
Rational Theory of Warrant Pricing,  
in: Industrial Managment Review, 6, S. 13-32.
- [136] **Samuelson, Paul (1965b):**  
Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly,  
in: Industrial Managment Review, 6, S. 41-49.

- [137] **Sandmann, Klaus (2001):**  
Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte, 2. Aufl., Springer, Berlin et al.
- [138] **Sarnoff, Paul (1965):**  
Russel Sage - The Money King, Ivan Obdensky, New York.
- [139] **Sato, Ken-Iti (1999):**  
Lévy Processes and the Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, Cambridge.
- [140] **Schäfer, Henry und Schässburger, Bernd (2001):**  
Bewertungsmängel von CAPM und DCF bei innovativen wachstumsstarken Unternehmen und optionspreistheoretische Alternativen, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 71, S. 85-107.
- [141] **Schoutens, Wim (2003):**  
Lévy Processes in Finance, John Wiley u. Sons, Chichester.
- [142] **Selby, Michael und Hodges, Stewart (1987):**  
On the Evaluation of Compound Options, in: Management Science, 33, S. 347-355.
- [143] **Sharpe, William (1964):**  
Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, in: Journal of Finance, 19, S. 425-442.
- [144] **Shimko, David (1994):**  
Options on Futures Spreads, in: Journal of Futures Markets, 14, S. 183-213.
- [145] **Skaruppe, Martin (1994):**  
Duplizierung von Bankgeschäften im Wertbereich als Kernproblem der Marktzinsmethode, Duncker u. Humblot, Berlin.
- [146] **Stapleton, Richard und Subrahmanyam, Marti (1984):**  
The Valuation of Multivariate Contingent Claims in Discrete Time Models, in: Journal of Finance, 39, S. 207-228.
- [147] **Steiner, Manfred und Bruns, Christoph (2002):**  
Wertpapiermanagement, 8. Auflage, Schäffer-Poeschel, Stuttgart.
- [148] **Steiner, Manfred, Wallmeier, Martin und Hafner, Reinhold (1999):**  
Baumverfahren zur Bewertung diskreter Knock-Out-Optionen, in: OR-Spektrum, 21, S. 147-181.

- [149] **Steiner, Manfred, Wenninger, Christian und Willinsky, Christian (2002):**  
Value-at-Risk-Schätzung bei Optionen,  
in: Finanzmarkt und Portfolio Management, 16, S. 69-87.
- [150] **Stoimenov, Pavel und Wilkens, Sascha (2004):**  
Der Markt für strukturierte Aktienprodukte in Deutschland,  
in: Finanzbetrieb, 6, S. 207-218.
- [151] **Stulz, René (1982):**  
Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets,  
in: Journal of Financial Economics, 11, S. 161-185.
- [152] **Trigeorgis, Lenos (1993):**  
The Nature of Option Interactions and the Valuation of Investments  
with Multiple Real Options,  
in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, 28, S. 1-20.
- [153] **Uhler, Helmut und Aussenegg, Wolfgang (1996):**  
Value at Risk (VaR) - Einführung und Methodenüberblick,  
in: Bankarchiv, 44, S. 831-836.
- [154] **Wallmeier, Martin (2003):**  
Der Informationsgehalt von Optionspreisen, Physica-Verlag, Heidelberg.
- [155] **Wenger, Ekkehard und Kaserer, Christoph (1998):**  
Präferenzfreie Bewertung derivativer Finanztitel: Zur Nobelpreisver-  
leihung für Wirtschaftswissenschaften an Myron Scholes und Robert  
C. Merton,  
in: Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 26, S. 29-32.
- [156] **Wilkens, Marco, Entrop, Oliver und Scholz, Hendrik (2001):**  
Bewertung und Konstruktion von attraktiven strukturierten Produk-  
ten am Beispiel von Cheapest-to-Deliver-Aktienzertifikaten,  
in: Bankarchiv, 49, S. 931-941.

Andreas Rathgeber  
Sauerampferweg 12  
70599 Stuttgart

Geburtsdatum/-ort:

05.09.1972 in Werneck

Schulbildung  
1979-1983  
1983-1992

Grundschule Deiningen  
Theodor-Heuss-Gymnasium Nördlingen

Studium  
WS 93/94 - SS 96

Studium der Wirtschaftswissenschaften an der  
Universität Hohenheim, Vertiefungsrichtungen:  
Makroökonomie und Prozesspolitik,  
Unternehmensforschung, Rechnungswesen und  
Finanzierung, Kreditwirtschaft

WS 96/97 - SS 02

Studium der Mathematik an der Universität  
Augsburg, Schwerpunkte: Differentialgleichungen,  
Funktionalanalysis, Statistik

Berufliche Tätigkeiten  
1997-2001

Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl  
Finanz- und Bankwirtschaft der  
Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der  
Universität Augsburg

2003-2005

Fachreferent für Wirtschafts- und  
Sozialwissenschaften an der Universität  
Hohenheim

ab 2005

Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl Finanz-  
und Bankwirtschaft der  
Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der  
Universität Augsburg

ISBN 3-8334-4505-X